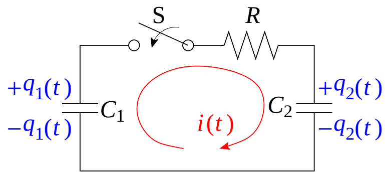
1　キャパシタの電荷について

以下の回路で $t=0$ でスイッチが閉じる場合を考える．



KVL より閉路方程式は以下のように書ける．

$$Ri(t)+\frac{q_2(t)}{C_2}=\frac{q_1(t)}{C_1} \tag{1}$$

$$i(t)=\frac{dq_2(t)}{dt}=-\frac{dq_1(t)}{dt} \tag{2}$$

$$q_1(t)+q_2(t)=q_1(0)+q_2(0) \tag{3}$$

これらの式より $q_2(t)$ を消去して $q_1(t)$ の式を導くと

$$-R\frac{dq_1(t)}{dt}+\frac{-q_1(t)+q_1(0)+q_2(0)}{C_2}=\frac{q_1(t)}{C_1} \tag{4}$$

$$R\frac{dq_1(t)}{dt}+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}q_1(t)=\frac{q_1(0)+q_2(0)}{C_2} \tag{5}$$

となるので，この微分方程式の解は

$$q_1(t)=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\cdot\frac{q_1(0)+q_2(0)}{C_2}+A\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)\qquad (A\ :\ \text{積分定数}) \tag{6}$$

と書ける．ここで，$t=0$ での初期条件を考慮すると積分定数 A は

$$\begin{aligned} q_1(0) &= \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\cdot\frac{q_1(0)+q_2(0)}{C_2}A \\ &\rightarrow \quad A=\frac{C_2q_1(0)-C_1q_2(0)}{C_1+C_2} \end{aligned} \tag{7}$$

と求まる．したがって，$q_1(t)$ は

$$q_1(t)=\frac{1}{C_1+C_2}\left[C_1\left\{q_1(0)+q_2(0)\right\}+\left\{C_2q_1(0)-C_1q_2(0)\right\}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right)\right] \tag{8}$$

と求まる．いま，$R\to 0$ の極限を考えると $t\geq +0$ において

$$q_1(t)=\frac{C_1\left\{q_1(-0)+q_2(-0)\right\}}{C_1+C_2}\qquad\rightarrow\qquad v_1(t)=\frac{C_1v_1(-0)+C_2v_2(-0)}{C_1+C_2} \tag{9}$$

となる．ここで，$t=-0$ でキャパシタに蓄えられているエネルギーは

$$W(-0)=\frac{1}{2}C_1v_1^2(-0)+\frac{1}{2}C_2v_2^2(-0) \tag{10}$$

であり，$t=+0$ においては

$$W(+0)=\frac{1}{2}(C_1+C_2)v_1^2(+0)=\frac{1}{2}\frac{\left\{C_1v_1(-0)+C_2v_2(-0)\right\}^2}{C_1+C_2} \tag{11}$$

であるので，エネルギー変化 ΔW は

$$\Delta W=W(+0)-W(-0)=-\frac{\left\{v_1(-0)-v_2(-0)\right\}^2}{2(C_1+C_2)} \tag{12}$$

となる．これは，エネルギーが減少したように見えるが，抵抗 R に電流が流れたことにより消費されたエネルギーを計算すると

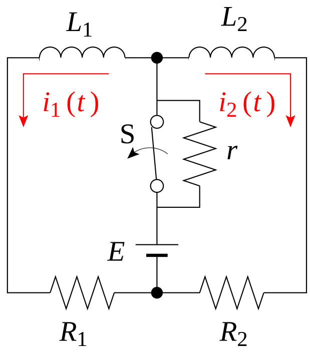
$$i(t) = -\frac{dq_1(t)}{dt}=\frac{C_2(q_1(0)-C_1q_2(0)}{RC_1C_2}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t\right) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty Ri(t)^2dt=\left[\frac{\left\{C_2q_1(0)-C_1q_2(0)\right\}^2}{RC_1^2C_2^2}\left(-\frac{RC_1C_2}{2(C_1+C_2)}\right)\exp\left(-\frac{2(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t\right)\right]_0^\infty \\ &= \left[-\frac{\left\{q_1(0)/C_1-q_2(0)/C_2\right\}^2}{2(C_1+C_2)}\exp\left(-\frac{2(C_1+C_2)}{RC_1C_2}t\right)\right]_0^\infty=\frac{\left\{v_1(0)-v_2(0)\right\}^2}{2(C_1+C_2)} \end{aligned} \tag{14}$$

であるので，$R \to 0$ のときにもそこでエネルギーが消費されており，この消費エネルギーを考慮するとエネルギー保存則が満足されている．

2　インダクタの電流について

以下の回路で $t=0$ でスイッチが開く場合を考える．



スイッチを抵抗 r に置き換えると，KVL より以下の閉路方程式を得る．

$$L_1\frac{di_1(t)}{dt}+(R_1+r)i_1(t)+ri_2(t)=E \tag{15}$$

$$L_2\frac{di_2(t)}{dt}+(R_2+r)i_2(t)+ri_1(t)=E \tag{16}$$

1 番目の式を $i_2(t)$ について解いて，これを第 2 式に代入すると

$$i_2(t)=\frac{1}{r}\left\{E-L_1\frac{di_1(t)}{dt}-(R_1+r)i_1(t)\right\} \tag{17}$$

$$\frac{d^2i_1(t)}{dt^2}+\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)\frac{di_1(t)}{dt}+\left(\frac{R_1+r}{L_1}\cdot\frac{R_2+r}{L_2}-\frac{r^2}{L_1L_2}\right)i_1(t)=\frac{R_2E}{L_1L_2} \tag{18}$$

この微分方程式の解は

$$i_1(t)=I_{1s}+Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t} \tag{19}$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R_1+r}{L_1}-\frac{R_2+r}{L_2}\right)^2+\frac{4r^2}{L_1L_2}} \tag{20}$$

$$\beta=-\frac{1}{2}\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R_1+r}{L_1}-\frac{R_2+r}{L_2}\right)^2+\frac{4r^2}{L_1L_2}} \tag{21}$$

$$I_{1s}=\frac{R_2E}{R_1R_2+(R_1+R_2)r} \tag{22}$$

と書ける．また $i_2(t)$ は

$$i_2(t)=\frac{E}{r}-\frac{L_1}{r}\left\{\alpha Ae^{\alpha t}+\beta Be^{\beta t}\right\}-\frac{R_1+r}{r}i_1(t) \tag{23}$$

と書ける．ここで初期条件として $i_1(0)=E/R_1$，$i_2(0)=E/R_2$ を考えると

$$i_1(0)\;=\;I_{1s}+A+B=\frac{E}{R_1} \tag{24}$$

$$i_2(0)\;=\;\frac{E}{r}-\frac{L_1}{r}\{\alpha A+\beta B\}-\frac{R_1+r}{r}\cdot\frac{E}{R_1}=\frac{E}{R_2} \tag{25}$$

と書け，これを整理すると

$$A+B=\frac{E}{R_1}-I_{1s} \tag{26}$$

$$\alpha A+\beta B=-\frac{rE}{L_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \tag{27}$$

と書ける．これから A，B を求めると

$$A = \frac{1}{\beta-\alpha}\left\{\frac{rE}{L_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\beta\left(\frac{E}{R_1}-I_{1s}\right)\right\} \tag{28}$$

$$B = \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{rE}{L_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\alpha\left(\frac{E}{R_1}-I_{1s}\right)\right\} \tag{29}$$

と求まる．ここで $r\to\infty$ とすると

$$I_{1s} = 0 \tag{30}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)^2-\frac{4\left\{R_1R_2+(R_1+R_2)r\right\}}{L_1L_2}} \tag{31}$$

$$\simeq -\frac{R_1R_2+(R_1+R_2)r}{L_1L_2}\left(\frac{R_1+r}{L_1}+\frac{R_2+r}{L_2}\right)^{-1}\simeq -\frac{R_1+R_2}{L_1L_2}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)=-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2} \tag{32}$$

$$\beta \simeq -\left(\frac{r}{L_1}+\frac{r}{L_2}\right)=-\frac{r(L_1+L_2)}{L_1L_2}=-\infty \tag{33}$$

$$A \simeq \frac{1}{\beta}\left\{\frac{r(R_1+R_2)E}{R_1R_2L_1}+\beta\left(\frac{E}{R_1}\right)\right\}\simeq -\frac{(R_1+R_2)L_2E}{R_1R_2(L_1+L_2)}+\frac{E}{R_1}=\frac{R_2L_1-R_1L_2}{R_1R_2(L_1+L_2)}E \tag{34}$$

であるので，$i_1(t)$ は以下のように求まる．

$$i_1(t)=\frac{L_1i_1(-0)-L_2i_2(-0)}{L_1+L_2}\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2}t\right) \tag{35}$$

このとき，時刻 $t=-0$ でのインダクタのエネルギーは

$$W(-0)=\frac{1}{2}L_1i_1(-0)^2+\frac{1}{2}L_2i_2(-0)^2 \tag{36}$$

であり，時刻 $t=+0$ では

$$W(+0)=\frac{1}{2}\frac{\left\{L_1i_1(-0)-L_2i_2(-0)\right\}^2}{L_1+L_2} \tag{37}$$

であるので，その差は

$$\Delta W=-\frac{L_1L_2\left\{i_1(-0)+i_2(-0)\right\}^2}{2(L_1+L_2)} \tag{38}$$

である．抵抗 r で消費されるエネルギーは $R\to\infty$ とすることを考えると

$$\begin{aligned} W_r &= \int_0^\infty r\left\{i_1(t)+i_2(t)\right\}^2dt=\int_0^\infty r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2E^2\exp\left(-\frac{2r(L_1+L_2)}{L_1L_2}t\right)dt \\ &= \left[-\left\{(i_1(-0)+i_2(-0)\right\}^2\cdot\frac{L_1L_2}{2(L_1+L_2)}\exp\left(-\frac{2r(L_1+L_2)}{L_1L_2}t\right)\right]_0^\infty \\ &= \frac{L_1L_2\left\{(i_1(-0)+i_2(-0)\right\}^2}{2(L_1+L_2)} \end{aligned} \tag{39}$$

となり，時刻 $t=-0$ から $+0$ の間のインダクタのエネルギー減少分と一致していることがわかる．一例として，$R_1=2\ \Omega$，$R_2=3\ \Omega$，$L_1=3$ H，$L_2=1$ H，$E=1$ V，$r=1000\ \Omega$ としたときの $i_1(t)$，$-i_2(t)$ の時間変化を下図に示す．破線が $i_1(t)$，一点鎖線が $-i_2(t)$，実線が $r\to\infty$ としたときの時間変化を表す．$t<0$ での電流と $t>0$ での電流が不連続に変化しているように見えるが，抵抗 r が有限の大きさを持つため，右の拡大図を見ると連続的に変化していることがわかる．