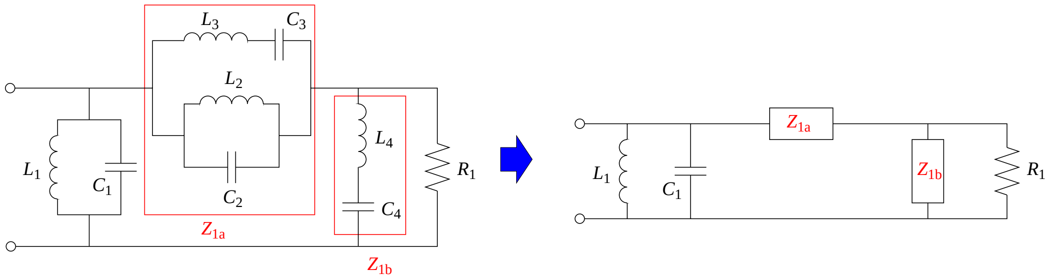
電気回路 II 宿題 (第 6 回)

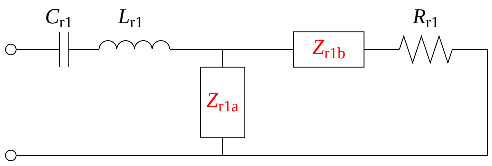
課題 1 教科書 P156 の問 9.1 を講義で行った 2 通りの方法で解くこと.

解答 1

問 9.1 の図を以下のように書き換える



上図右の回路の逆回路を求めると，以下のようになる.



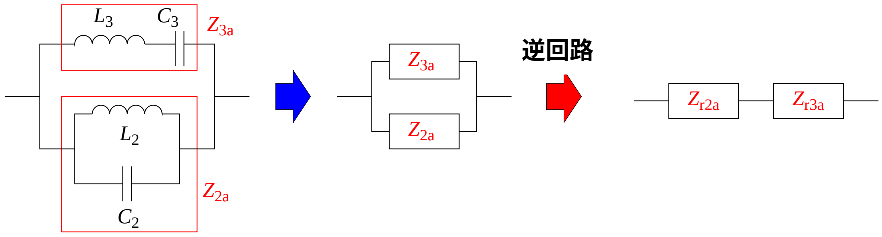
$$C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad L_{r1} = C_1 R_0^2, \quad R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1}$$

Z_{1a}

$$Z_{r1a} = \frac{R_0^2}{Z_{1a}} \quad (Z_{1a}\text{の逆回路})$$

$$Z_{r1b} = \frac{R_0^2}{Z_{1b}} \quad (Z_{1b}\text{の逆回路})$$

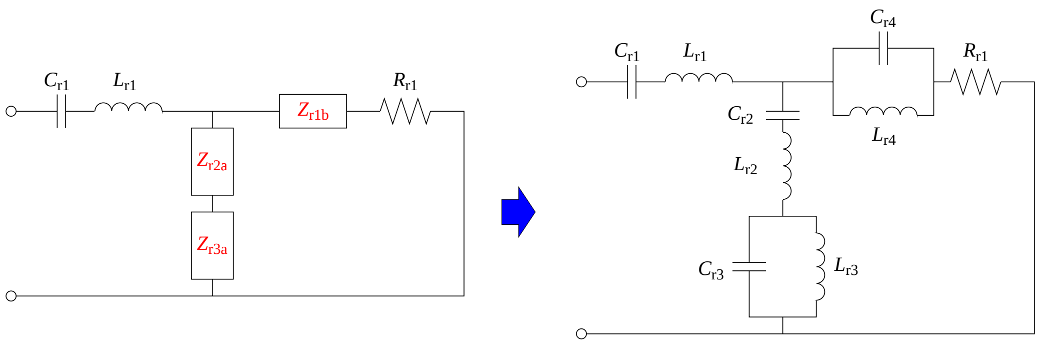
部分の逆回路は以下のようになる.



$$Z_{r2a} = \frac{R_0^2}{Z_{2a}} \quad (Z_{2a}\text{の逆回路})$$

$$Z_{r3a} = \frac{R_0^2}{Z_{3a}} \quad (Z_{3a}\text{の逆回路})$$

したがって，全体の逆回路は下図左のよになり，Z_{r2a}，Z_{r3a}，Z_{r1b} の部分にそれぞれ，Z_{2a}，Z_{3a}，Z_{1b} の逆回路を入れると，下図右のように逆回路が求まる.



逆回路中の各素子の値は

$$C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2} = 1\ \mu\text{F}, \quad C_{r2} = \frac{L_2}{R_0^2} = 3\ \mu\text{F}, \quad C_{r3} = \frac{L_3}{R_0^2} = 0.1\ \mu\text{F}, \quad C_{r4} = \frac{L_4}{R_0^2} = 10\ \mu\text{F}$$

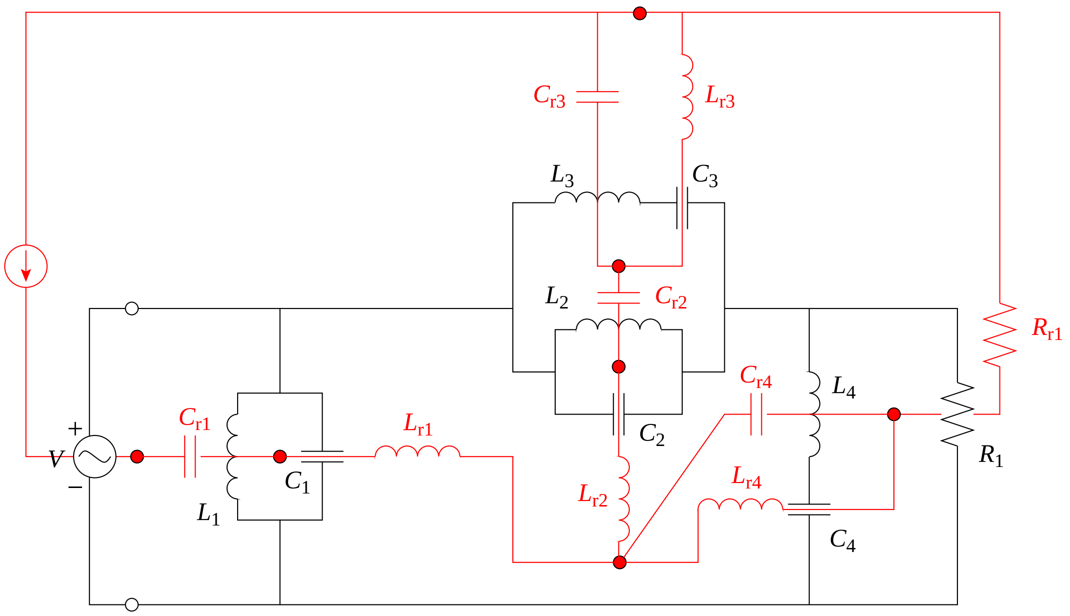
$$L_{r1} = C_1 R_0^2 = 10\ \text{H}, \quad L_{r2} = C_2 R_0^2 = 0.3\ \text{H}, \quad L_{r3} = C_3 R_0^2 = 2\ \text{H}, \quad L_{r4} = C_4 R_0^2 = 1\ \text{H}$$

$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1} = 1\ \text{k}\Omega$$

である.

解答２

下図の様に，便宜的に電圧源を付加し，各閉路に節点を作り，逆回路を作る．

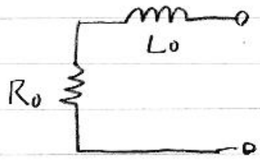


上の図の電流源を削除し，赤で示した回路を整理すると，解答１の逆回路を得ることができる．

9.2

(i) 負荷より左をノルトンの等価回路で表現すると

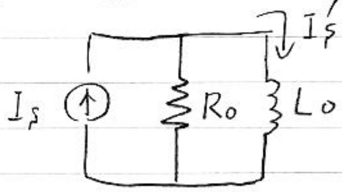
。Y_0の計算



$$Y_0 = \frac{1}{R_0 + j\omega L_0} = \frac{R_0 - j\omega L_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2} = G + jB$$

$$\begin{cases} G = \dfrac{R_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2} \\ B = \dfrac{-\omega L_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2} \end{cases}$$

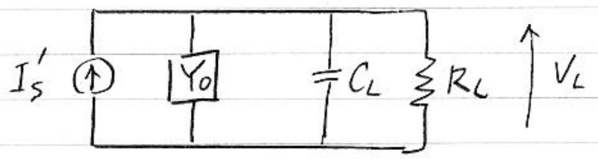
。I_s'の計算



分流の法則より

$$I_s' = \frac{R_0}{R_0 + j\omega L_0} I_s = \frac{jB}{G + jB} I_s$$

ノルトン等価回路を用いて 図問9.2の回路は以下のようになる



R_Lにかかる電圧V_Lは　$G_L = 1/R_L$, $B_L = \omega C_L$ とおくと

$$V_L = \frac{I_s'}{(G + G_L) + j(B + B_L)}$$

$$P = \frac{|V_L|^2}{R_L} = \frac{G_L |I_s'|^2}{(G + G_L)^2 + (B + B_L)^2}$$

G_L (R_L) を変化させて P が極値をとるのは

$$\frac{\partial P}{\partial G_L} = \frac{(G + G_L)^2 + (B + B_L)^2 - G_L \cdot 2(G + G_L)}{\{(G + G_L)^2 + (B + B_L)^2\}^2} |I_s'|^2 = 0$$

$$(G - G_L)(G + G_L) + (B + B_L)^2 = 0$$

$$G^2 - G_L^2 + (B + B_L)^2 = 0$$

$$G_L = \sqrt{G^2 + (B + B_L)^2}$$

このG_LでPは極大かつ最大になる。

したがって

$$R_{L,opt} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (B + B_L)^2}} = \frac{R_0^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R_0^2 + \omega^2 \{C_L (R_0^2 + \omega^2 L_0^2) - L_0\}^2}}$$

このときの P の値は

$$P_{max} = \frac{\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}}{\{G+\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}\}^2+(B+B_L)^2}|I_s'|^2$$

$$= \frac{\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}}{G^2+G^2+(B+B_L)^2+2G\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}+(B+B_L)^2}|I_s'|^2$$

$$= \frac{\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}}{2\{G^2+(B+B_L)^2+G\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}\}}\cdot|I_s'|^2$$

$$= \frac{1}{2\{\sqrt{G^2+(B+B_L)^2}+G\}}\cdot\frac{R_0^2}{R_0^2+\omega^2L_0^2}|I_s|^2$$

$$= \frac{R_0^2}{2\{\sqrt{R_0^2+\{-\omega L_0+\omega C_L(R_0^2+\omega^2L_0^2)\}^2}+R_0\}}|I_s|^2$$

$$= \frac{R_0^2|I_s|^2}{2\left[R_0+\sqrt{R_0^2+\omega^2\{C_L(R_0^2+\omega^2L_0^2)-L_0\}^2}\right]}$$

(ii) 最大電力伝送定理より

$$B_{L,opt} = -B,\quad G_{L,opt} = G$$

よって

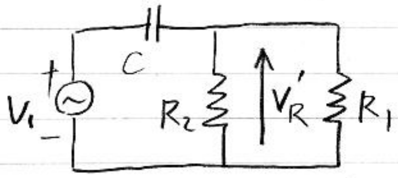
$$R_{L,opt} = \frac{1}{G_{L,opt}} = \frac{1}{G} = \frac{R_0^2+\omega^2L_0^2}{R_0}$$

$$C_{L,opt} = \frac{B_{L,opt}}{\omega} = \frac{L_0}{R_0^2+\omega^2L_0^2}$$

このとき

$$P_{max} = \frac{|I_s'|^2}{4G} = \frac{R_0^2+\omega^2L_0^2}{4R_0}\cdot\frac{R_0^2}{R_0^2+\omega^2L_0^2}|I_s|^2 = \frac{R_0}{4}|I_s|^2$$

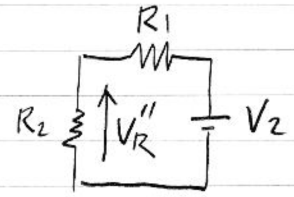
9.3 重ね合わせの理より R_2にかかる電圧 V_Rを求める



$$R_1 /\!/ R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = R_{12} \text{ とおく}$$

分圧の法則より

$$V_R' = \frac{R_{12}}{R_{12}+1/j\omega C}V_1 = \frac{j\omega CR_1R_2}{(R_1+R_2)+j\omega CR_1R_2}V_1$$



$$V_R'' = \frac{R_2}{R_1+R_2}V_2$$

(コンデンサは直流に対して抵抗が∞)

以上より

$$V_R' = \frac{j200\pi\frac{1}{200\pi}\cdot 2\cdot 10\cdot 10}{(2+10)+j200\pi\cdot\frac{1}{200\pi}\cdot 2\cdot 10} = \frac{200}{12+j20} = \frac{50}{3+j5}$$

$$= \frac{50}{\sqrt{9+25}}e^{-j\phi} \qquad \left(\phi = \tan^{-1}\frac{5}{3}\right)$$

$$= \frac{50}{\sqrt{34}}e^{-j\phi}\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{V_R'' = \frac{10}{2+10}10 = \frac{100}{12} = \frac{50}{6}\ \mathrm{V}}$$

時間依存電圧は

$$v_R(t) = v_R' + v_R'' = \sqrt{2}\cdot\frac{50}{\sqrt{34}}\sin(\omega t-\phi) + \frac{50}{6}\ \mathrm{V}$$

二乗時間平均は

$$\overline{v_R^2} = \frac{2500}{34} + \frac{2500}{36}$$

よって消費電力は

$$P = \frac{\overline{v_R^2}}{R_2} = \frac{1}{10}\left(\frac{2500}{34}+\frac{2500}{36}\right) = 250\frac{34+36}{34\times 36} = \frac{250\times 70}{3^2\cdot 2^3\cdot 17}$$

$$= \frac{125\times 35}{18\times 17} = \frac{4375}{306} \simeq 14.3\ \mathrm{W}$$

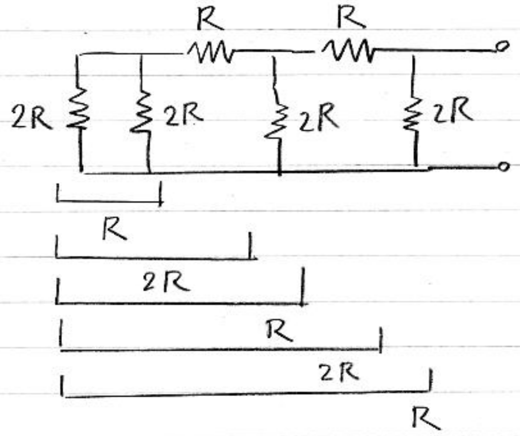
125
35
625
375
4375

18
17
126
18
306

14.29
306) 4375
306
1315
1224
910
612
2980
2754

9.5

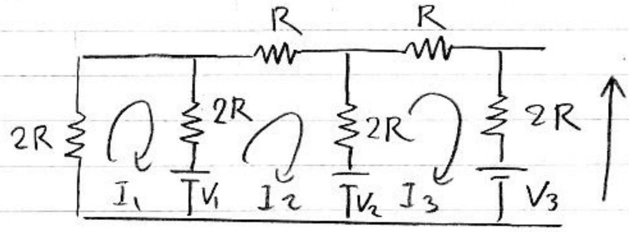
内部インピーダンスは電圧源を短絡して



順次左から抵抗を合成すると

$$Z_0 = R$$

開放電圧の計算



$$V_f = V_3 + 2RI_3$$

閉路方程式は

$$\begin{bmatrix} -V_1 \\ V_1 - V_2 \\ V_2 - V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4R & -2R & 0 \\ -2R & 5R & -2R \\ 0 & -2R & 5R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 100R^3 - 20R^3 - 16R^3 = 64R^3$$

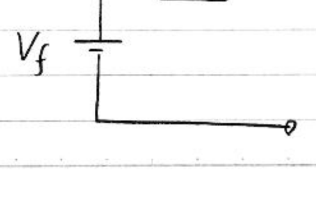
$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4R & -2R & -V_1 \\ -2R & 5R & V_1 - V_2 \\ 0 & -2R & V_2 - V_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{20R^2(V_2 - V_3) - 4R^2 V_1 - 4R^2(V_2 - V_3) + 8R^2(V_1 - V_2)}{64R^3}$$

$$= \frac{4V_1 + 8V_2 - 24V_3}{64R}$$

よって

$$V_f = V_3 + \frac{4V_1 + 8V_2 - 16V_3}{32} = \frac{1}{8}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{2}V_3$$

よって，テブナン等価回路は

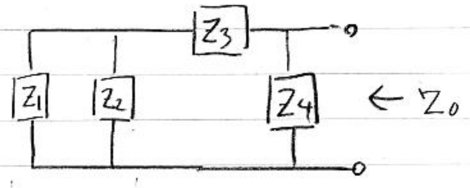


$$V_f = \frac{1}{8}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{2}V_3$$

$$Z_0 = R$$

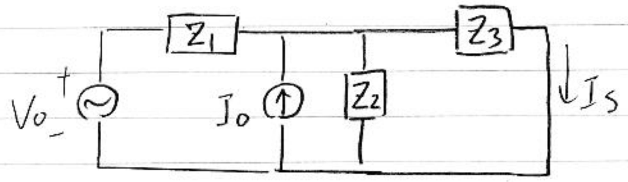
9.6

内部アドミタンスは



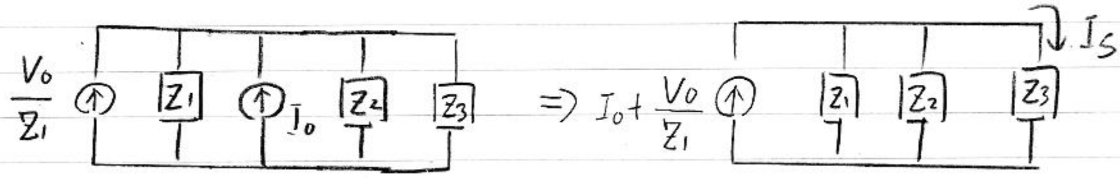
$$
\begin{aligned}
Z_0 &= \{(Z_1 /\!/ Z_2) + Z_3\} /\!/ Z_4 \\
&= \left\{ \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 \right\} /\!/ Z_4 \\
&= \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2} /\!/ Z_4 \\
&= \frac{\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2} \cdot Z_4}{\frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}{Z_1 + Z_2} + Z_4} \\
&= \frac{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)Z_4}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 + Z_1Z_4 + Z_2Z_4}
\end{aligned}
$$

短絡電流



1-1'を短絡するとZ4には電流が流れない。

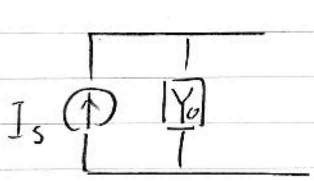
⇓ 電圧源を電流源に変換する



分流の法則より

$$
I_S = \frac{1/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3} \cdot \left(I_0 + \frac{V_0}{Z_1}\right) = \frac{Z_2(Z_1 I_0 + V_0)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}
$$

以上より



$$
I_S = \frac{Z_2(Z_1 I_0 + V_0)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}
$$

$$
Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3 + Z_1Z_4 + Z_2Z_4}{(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)Z_4}
$$