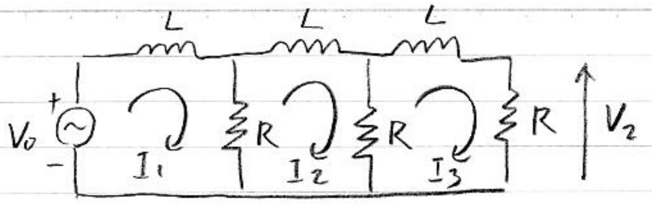
8.1

(i)



閉路1： $V_0 = j\omega L I_1 + R(I_1 - I_2) = (R + j\omega L) I_1 - R I_2$

2： $0 = R(I_2 - I_1) + j\omega L I_2 + R(I_2 - I_3) = -R I_1 + (2R + j\omega L) I_2 - R I_3$

3： $0 = R(I_3 - I_2) + j\omega L I_3 + R I_3 = -R I_2 + (2R + j\omega L) I_3$

よって閉路方程式は

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + j\omega L & -R & 0 \\ -R & 2R + j\omega L & -R \\ 0 & -R & 2R + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

行列式は

$$\begin{aligned} \Delta &= (R + j\omega L)(2R + j\omega L)(2R + j\omega L) \\ &\quad - (R + j\omega L)(-R)^2 - (-R)^2 (2R + j\omega L) \\ &= (R + j\omega L)(4R^2 + 4j\omega L R - \omega^2 L^2) - R^2 (3R + j2\omega L) \\ &= 4R^3 + j8\omega L R^2 - 5\omega^2 L^2 R - j\omega^3 L^3 - 3R^3 - j2\omega L R^2 \\ &= R^3 + j6\omega L R^2 - 5\omega^2 L^2 R - j\omega^3 L^3 \end{aligned}$$

I_3について解く

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R + j\omega L & -R & V_0 \\ -R & 2R + j\omega L & 0 \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(-R)^2 V_0}{\Delta}$$

V_2/V_0は

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{R I_3}{V_0} = \frac{R^3}{\Delta} = \frac{R^3}{(R^3 - 5\omega^2 L^2 R) + j\omega L(6R^2 - \omega^2 L^2)}$$

$$= \frac{1}{(1 - 5\omega^2 L^2 / R^2) + j\omega (L/R)(6 - \omega^2 L^2 / R^2)}$$

(ii)

V_2とV_0が逆相になる $\longrightarrow$ (V_2/V_0)が負の実数

したがって

分母の虚部 $= 0$ $\longrightarrow$ $\omega = 0, \ \dfrac{\sqrt{6} R}{L}$

このときの分母の実部の値は

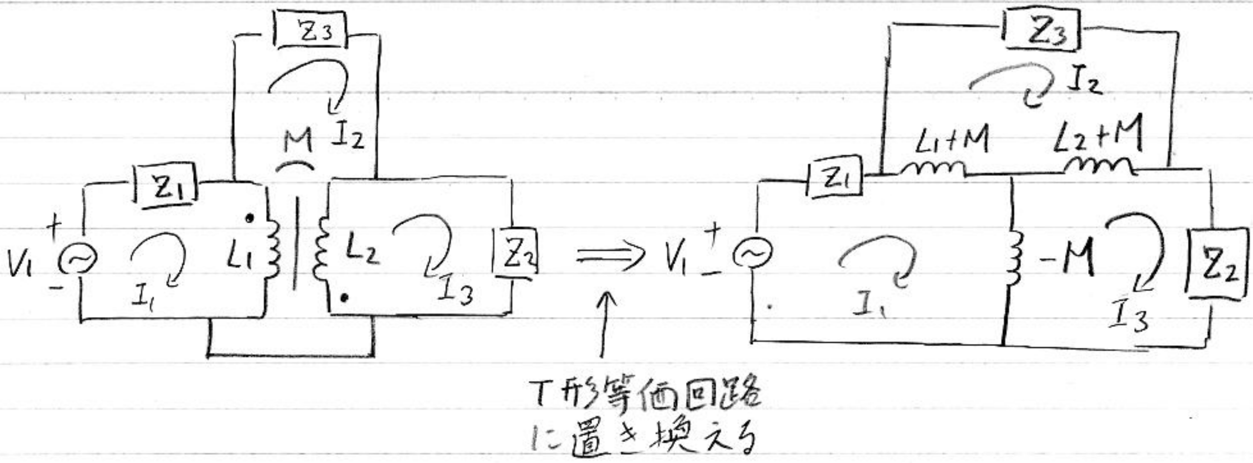
$\omega = 0 \longrightarrow 1$

$\omega = \sqrt{6} R / L \longrightarrow -29$

よって

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{6} R}{2\pi L}, \quad \frac{V_2}{V_0} = -\frac{1}{29}$$

8.2



閉路1： $V_1 = Z_1 I_1 + j\omega(L_1+M)(I_1-I_2) + j\omega(-M)(I_1-I_3)$
$= \{Z_1 + j\omega L_1\} I_1 - j\omega(L_1+M) I_2 + j\omega M I_3$

閉路2： $0 = j\omega(L_1+M)(I_2-I_1) + Z_3 I_2 + j\omega(L_2+M)(I_2-I_3)$
$= -j\omega(L_1+M) I_1 + \{Z_3 + j\omega(L_1+L_2+2M)\} I_2 - j\omega(L_2+M) I_3$

閉路3： $0 = j\omega(-M)(I_3-I_1) + j\omega(L_2+M)(I_3-I_2) + Z_2 I_3$
$= j\omega M I_1 - j\omega(L_2+M) I_2 + \{Z_2 + j\omega L_2\} I_3$

以上より，閉路方程式は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1+j\omega L_1 & -j\omega(L_1+M) & j\omega M \\ -j\omega(L_1+M) & Z_3+j\omega(L_1+L_2+2M) & -j\omega(L_2+M) \\ j\omega M & -j\omega(L_2+M) & Z_2+j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

8.3

(i) 閉路1： $V_1 = (R_1+j\omega L_1)I_1 + \left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)(I_1-I_2)$

$$= \left\{R_1+j\omega(L_1+L_2)+\frac{1}{j\omega C_2}\right\}I_1 - \left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)I_2$$

閉路2： $0 = \left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)(I_2-I_1) + (R_2+j\omega L_3)I_2$

$$= -\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)I_1 + \left\{R_2+j\omega(L_2+L_3)+\frac{1}{j\omega C_2}\right\}I_2$$

以上より

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+j\omega(L_1+L_2)+\frac{1}{j\omega C_2} & -\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right) \\ -\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right) & R_2+j\omega(L_2+L_3)+\frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

(ii) $\Delta = \left\{R_1+j\omega(L_1+L_2)+\frac{1}{j\omega C_2}\right\}\left\{R_2+j\omega(L_2+L_3)+\frac{1}{j\omega C_2}\right\}$

$$- \left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)^2$$

$$= \left\{(R_1+j\omega L_1)+\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)\right\}\left\{(R_2+j\omega L_3)+\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)\right\}$$

$$- \left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)^2$$

$$= (R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_3) + \{(R_1+R_2+j\omega(L_1+L_3)\}\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)$$

$$= \frac{1}{j\omega C_2}\left\{-j\omega^3(L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1) - \omega^2\{L_1R_2+R_1L_3+R_1L_2+R_2L_2\}C_2 + j\omega(R_1R_2C_2+L_1+L_3)+(R_1+R_2)\right\}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+j\omega(L_1+L_2)+1/j\omega C_2 & V_1 \\ -(j\omega L_2+1/j\omega C_2) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{+\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)V_1}{\Delta}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_2R_2}{V_1}$$

$$= \frac{(1-\omega^2L_2C_2)R_2}{\underbrace{-j\omega^3(L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1)C_2-\omega^2\{(L_2+L_3)R_1+(L_1+L_2)R_2\}C_2 + j\omega(R_1R_2C_2+L_1+L_3)+(R_1+R_2)}_{\text{分母}}}$$

(iii) (ii)より $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \longrightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}$

8.4

(i) 閉路1： $V_1 = R_a(I_1 - I_3) + j\omega L(I_1 - I_2)$

$= (R_a + j\omega L)I_1 - j\omega L I_2 - R_a I_3$

閉路2： $0 = j\omega L(I_2 - I_1) + R_b(I_2 - I_3) + R_c I_2$

$= -j\omega L I_1 + (R_b + R_c + j\omega L)I_2 - R_b I_3$

閉路3： $0 = R_a(I_3 - I_1) + \frac{1}{j\omega C} I_3 + R_b(I_3 - I_2)$

$= -R_a I_1 - R_b I_2 + (R_a + R_b + \frac{1}{j\omega C})I_3$

以上より閉路方程式は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + j\omega L & -j\omega L & -R_a \\ -j\omega L & R_b + R_c + j\omega L & -R_b \\ -R_a & -R_b & R_a + R_b + 1/j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

(ii) $R_a = R_b = R_c = R$ とすると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + j\omega L & -j\omega L & -R \\ -j\omega L & 2R + j\omega L & -R \\ -R & -R & 2R + 1/j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

R_bを流れる電流が0になる条件は

$I_2 = I_3$

ここで

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R + j\omega L & V_1 & -R \\ -j\omega L & 0 & -R \\ -R & 0 & 2R + 1/j\omega C \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V_1(-R)^2 - V_1(-j\omega L)(2R + 1/j\omega C)}{\Delta}$$

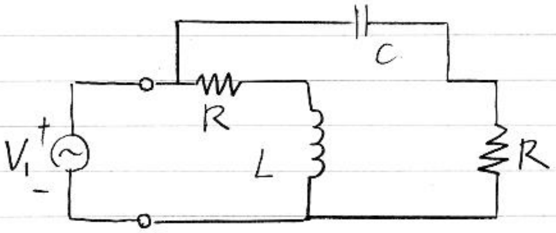
$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R + j\omega L & -j\omega L & V_1 \\ -j\omega L & 2R + j\omega L & 0 \\ -R & -R & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V_1(-j\omega L)(-R) - V_1(2R + j\omega L)(-R)}{\Delta}$$

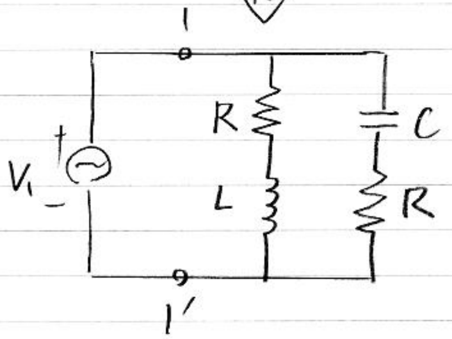
$I_2 = I_3$ より

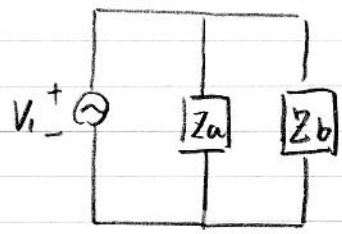
$$\left(R^2 + 2j\omega LR + \frac{L}{C}\right)V_1 = \left(+j\omega LR + 2R^2 + j\omega LR\right)V_1$$

$$\boxed{\frac{L}{C} = R^2}$$

(iii) Rbに電流が流れないので 以下のように回路を書き直せる





⇒ 

$Z_a = R + j\omega L$

$Z_b = R + \dfrac{1}{j\omega C}$

1-1'から見たインピーダンスは

$$Z_i = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} = \frac{(R+j\omega L)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{(R+j\omega L) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}$$

ここで

(ii)より $1/C = R^2/L$ より

$$Z_a = R + j\omega L$$

$$Z_b = R + \frac{R^2}{j\omega L} = \frac{R(R+j\omega L)}{j\omega L}$$

$$Z_i = \frac{(R+j\omega L)\dfrac{R(R+j\omega L)}{j\omega L}}{(R+j\omega L) + \dfrac{R}{j\omega L}(R+j\omega L)} = \frac{R(R+j\omega L)}{R+j\omega L} = R.$$

8.5 (i) 平衡条件より

$$\left(R_a + \frac{1}{j\omega C_a}\right) : \left(R_b /\!/ \frac{1}{j\omega C_b}\right) = 2R : R$$

$$R\left(R_a + \frac{1}{j\omega C_a}\right) = 2R \frac{R_b \cdot \frac{1}{j\omega C_b}}{R_b + \frac{1}{j\omega C_b}}$$

$$\frac{1 + j\omega R_a C_a}{j\omega C_a} = 2 \frac{R_b}{1 + j\omega R_b C_b}$$

$$(1 + j\omega R_a C_a)(1 + j\omega R_b C_b) = j2\omega R_b C_a$$

$$(1 - \omega^2 R_a R_b C_a C_b) + j\omega(R_a C_a + R_b C_b - 2R_b C_a) = 0$$

実部 = 0 より

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_a R_b C_a C_b}} \longrightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_a R_b C_a C_b}}$$

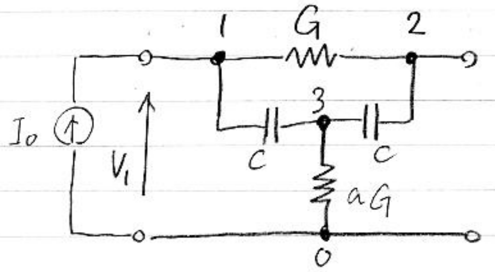
虚部 = 0 より

$$R_a C_a + R_b C_b - 2R_b C_a = 0$$

$$R_a C_a + R_b C_b = 2R_b C_a$$

8.6

(i)



節点方程式

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G+j\omega C & -G & -j\omega C \\ -G & G+j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & -j\omega C & aG+j2\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

(参考) 流入電流=0 から

節点1: $I_0 + G(V_2 - V_1) + j\omega C(V_3 - V_1) = 0$

節点2: $G(V_1 - V_2) + j\omega C(V_3 - V_2) = 0$

節点3: $j\omega C(V_1 - V_3) + j\omega C(V_2 - V_3) + aG(0 - V_3) = 0$

⇓

電流源を左辺, 他を右辺にまとめて
対称行列にする

(ii)

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_0 & -G & -j\omega C \\ 0 & G+j\omega C & -j\omega C \\ 0 & -j\omega C & aG+j2\omega C \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{I_0(G+j\omega C)(aG+j2\omega C) - I_0(-j\omega C)^2}{\Delta}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} G+j\omega C & I_0 & -j\omega C \\ -G & 0 & -j\omega C \\ -j\omega C & 0 & aG+j2\omega C \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{I_0(-j\omega C)^2 - I_0(-G)(aG+j2\omega C)}{\Delta}$$

よって

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-\omega^2 C^2 + G(aG+j2\omega C)}{(G+j\omega C)(aG+j2\omega C) + \omega^2 C^2} = \frac{(aG^2 - \omega^2 C^2) + j2\omega CG}{(aG^2 - \omega^2 C^2) + j(2+a)\omega CG}$$

(iii) $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{A_2 + jB_2}{A_1 + jB_1}$ とおくと

V_1 と V_2 が同相になるのは

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 \longrightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1$$

したがって

$$(aG^2 - \omega^2 C^2)(2\omega CG) = (aG^2 - \omega^2 C^2)(2+a)\omega CG$$

$$a\omega CG(aG^2 - \omega^2 C^2) = 0$$

$a \neq 0,\ \omega \neq 0$ より

$$aG - \omega^2 C^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{a}\frac{G}{C} \longrightarrow f = \frac{\sqrt{a}G}{2\pi C}$$

このとき

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0 + j2\omega CG}{0 + j(2+a)\omega CG} = \frac{2}{2+a}$$