3.1

(1) $f(t) = e^{at}e^{j\omega t}$

ラプラス変換の定義より

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{at}e^{j\omega t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{(-s+a+j\omega)t}dt = \left[\frac{1}{-s+(a+j\omega)}e^{-st}e^{(a+j\omega)t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s+(a+j\omega)} \\
&= \frac{1}{s-(a+j\omega)}
\end{aligned}
$$

(2) $f(t) = \sin\omega t$

ラプラス変換の定義より

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\sin\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s}e^{-st}\omega\cos\omega t dt = 0 + \int_0^\infty \frac{\omega}{s}e^{-st}\cos\omega t dt \\
&= \left[\frac{\omega}{s}\left(\frac{1}{-s}\right)e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\omega}{s}\left(\frac{1}{-s}\right)e^{-st}(-\omega)\sin\omega t dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s) \\
\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) &= \frac{\omega}{s^2} \\
F(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

(3) $f(t) = \sin\omega t$

ラプラス変換の定義より

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \cosh\omega t e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(s-\omega)t} + e^{-(s+\omega)t}\right)dt \\
&= \left[-\frac{1}{s-\omega}e^{-(s-\omega)t} - \frac{1}{s+\omega}e^{-(s+\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2-\omega^2}
\end{aligned}
$$

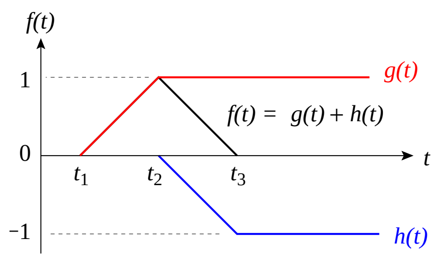
3.2

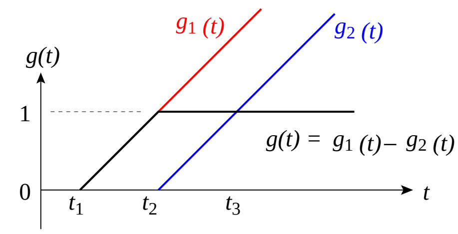
(1)

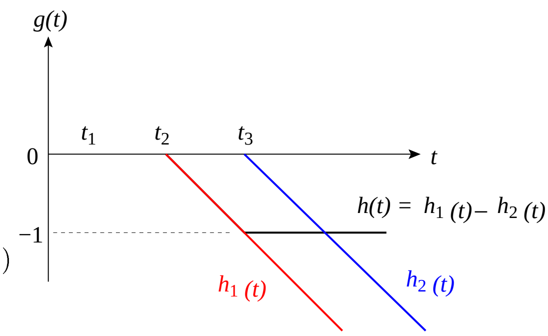
ラプラス変換の定義より計算すると

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_1)e^{-st}dt + \int_{t_2}^{t_3} \frac{1}{t_2-t_3}(t-t_3)e^{-st}dt \\
&= \left[\frac{1}{-s(t_2-t_1)}(t-t_1)e^{-st}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{s(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}dt \\
&\quad + \left[\frac{1}{-s(t_2-t_3)}(t-t_3)e^{-st}\right]_{t_2}^{t_3} + \frac{1}{s(t_2-t_3)}\int_{t_2}^{t_3} e^{-st}dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-st_2} + \left[\frac{-1}{s^2(t_2-t_1)}e^{-st}\right]_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{s}e^{-st_2} + \left[\frac{-1}{s^2(t_2-t_3)}e^{-st}\right]_{t_2}^{t_3} \\
&= \frac{1}{s^2(t_2-t_1)}\left(e^{-st_1}-e^{-st_2}\right) + \frac{1}{s^2(t_2-t_3)}\left(e^{-st_2}-e^{-st_3}\right) \\
&= \frac{1}{s^2(t_2-t_1)}\left(e^{-st_1}-e^{-st_2}\right) - \frac{1}{s^2(t_3-t_2)}\left(e^{-st_2}-e^{-st_3}\right)
\end{aligned}
$$

ラプラス変換に関する定理を使うと
右図より







$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_1)u(t-t_1) \\
g_2(t) &= \frac{1}{t_2-t_1}(t-t_2)u(t-t_2) \\
h_1(t) &= -\frac{1}{t_3-t_2}(t-t_2)u(t-t_2) \\
h_2(t) &= -\frac{1}{t_3-t_2}(t-t_3)u(t-t_3)
\end{aligned}
$$

以下の関係式

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \text{(ラプラス変換表参照)}$$

$$f(t-a) = e^{-as}F(s) \qquad \text{(推移定理)}$$

を使うと，それぞれのラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_1 s}}{s} \\
G_2(s) &= \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_2 s}}{s} \\
H_1(s) &= -\frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_2 s}}{s} \\
H_2(s) &= -\frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_3 s}}{s}
\end{aligned}
$$

したがって，$f(t) = g(t) + h(t) = (g_1(t) - g_2(t)) + (h_1(t) - h_2(t))$
のラプラス変換は，加法定理より

$$F(s) = \frac{1}{t_2-t_1}\frac{e^{-t_1 s}-e^{-t_2 s}}{s} - \frac{1}{t_3-t_2}\frac{e^{-t_2 s}-e^{-t_3 s}}{s}$$

3.2

(2)

$0 < t < T$ の範囲の関数を $f_1(t)$ とすると，$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots$ と書ける．
$f_1(t)$ のラプラス変換は定義式より

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^T \frac{t}{T} e^{-st} dt = \left[\frac{t}{-sT} e^{-st} \right]_0^T + \int_0^\infty \frac{1}{sT} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-sT} + \left[\frac{1}{-s^2 T} e^{-st} \right]_0^T \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2 T} \left(e^{-sT} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s^2 T} \left(1 - e^{-sT} \right) - \frac{1}{s} e^{-sT} \end{aligned}$$

一方，$f(t)$ のラプラス変換は，加法定理と推移定理より

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_1(s) e^{-Ts} + F_1(s) e^{-2Ts} + F_1(s) e^{-3Ts} + \cdots \\ &= F_1(s)(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \cdots) \end{aligned}$$

無限等比級数の和の公式を用いると

$$F(s) = F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-Ts}} = \frac{1}{s^2 T} - \frac{1}{s} \frac{e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}$$

3.3

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$

留数定理を用いると，$s=0,-a,-b$ でそれぞれ 1 位の極となるので

$$\begin{aligned}F(s) &= \left.\frac{1}{(s+a)(s+b)}e^{st}\right|_{s=0}+\left.\frac{1}{s(s+b)}e^{st}\right|_{s=-a}+\left.\frac{1}{s(s+a)}e^{st}\right|_{s=-b}\\ &= \frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}e^{-at}-\frac{1}{b(a-b)}e^{-bt}\\ &= \frac{1}{ab}+\frac{1}{a-b}\left(\frac{e^{-at}}{a}-\frac{e^{-bt}}{b}\right)\end{aligned}$$

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

留数定理を用いると，$s=0$ で 2 位の極，$s=-1$ で 1 位の極となるので

$$\begin{aligned}F(s) &= \left.\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}e^{st}\right)\right|_{s=0}+\left.\frac{1}{s^2}e^{st}\right|_{s=-1}\\ &= \left.\left(\frac{-1}{(s+1)^2}e^{st}+\frac{t}{s+1}e^{st}\right)\right|_{s=0}+e^{-t}\\ &= -1+t+e^{-t}\end{aligned}$$

(3) $F(s)=\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

$F(s)$ を以下のように変形する

$$F(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha+j\omega)(s+\alpha-j\omega)}$$

$F(s)$ は $s=-\alpha\pm j\omega$ にそれぞれ 1 位の極を持つので

$$\begin{aligned}F(s) &= \left.\frac{s+\alpha}{s+\alpha+j\omega}e^{st}\right|_{s=-\alpha+j\omega}+\left.\frac{s+\alpha}{s+\alpha-j\omega}e^{st}\right|_{s=-\alpha-j\omega}\\ &= \frac{j\omega}{j2\omega}e^{(-\alpha+j\omega)t}+\frac{-j\omega}{-j2\omega}e^{(-\alpha-j\omega)t}\\ &= e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\\ &= e^{-\alpha t}\cos\omega t\end{aligned}$$

3.4

抵抗 R_1 に流れる電流を $i(t)$ とすると

$$R_1 i(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = E \qquad (\text{左側の閉ループ})$$
$$R_2 i_R(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \qquad (\text{右側の閉ループ})$$
$$i(t) = i_L(t) + i_R(t) \qquad (\text{ある節点に流れ込む電流と流れ出す電流の和は }0)$$

上式をラプラス変換すると以下のようになる．

$$R_1 I(s) + sLI_L(s) = \frac{E}{s} \tag{1}$$
$$R_2 I_R(s) - sLI_L(s) = 0 \tag{2}$$
$$I(s) = I_L(s) + I_R(s) \tag{3}$$

ここで，以下の関係式を用いた

$$\begin{aligned}
\frac{di_L(t)}{dt} &= sI_L(s) - i_L(0) && (\text{微分定理}) \\
&= sI_L(s) && (\text{初期条件より } t=0 \text{ で } i_L(0)=0) \\
\mathcal{L}\{E\} &= \mathcal{L}\{Eu(t)\} = E\mathcal{L}\{u(t)\} && (\text{電圧は } t \geq 0 \text{ でかかる，加法定理}) \\
&= E\frac{1}{s} && (\text{ラプラス変換表より})
\end{aligned}$$

普通に連立方程式を解いても良いが，(1)〜(3) を行列の形で書くと

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & sL \\ 0 & R_2 & -sL \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ I_R(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式の左辺行列の行列式は

$$\begin{aligned}
\Delta &= \{R_1R_2(-1)+0+0\} - \{R_1(-sL)(-1)+0+(sL)R_2\} = -R_1R_2 - sL(R_1+R_2) \\
&= -L(R_1+R_2)\left(s + \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\right) \\
&= -L(R_1+R_2)(s+\alpha) \qquad \left(\text{ただし}\alpha = \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\right)
\end{aligned}$$

Cramer の公式より

$$I_R(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & E/s & sL \\ 0 & 0 & -sL \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-EL}{-L(R_1+R_2)(s+\alpha)} = \frac{E}{(R_1+R_2)}\frac{1}{(s+\alpha)}$$

$$I_L(s) = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & E/s \\ 0 & R_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{R_2E/s}{-L(R_1+R_2)(s+\alpha)} = \frac{R_2E}{L(R_1+R_2)}\frac{1}{s(s+\alpha)} = \frac{\alpha E}{R_1}\frac{1}{s(s+\alpha)}$$

$I_R(s)$，$I_L(s)$ をラプラス逆変換すると．

$$i_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I_R(s)\} = \frac{E}{(R_1+R_2)}e^{-\alpha t} \qquad (\text{ラプラス変換表より})$$

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_L(s)\} = sI_L(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+\alpha)I_L(s)e^{st}\Big|_{s=-\alpha} && (\text{留数演算より}) \\
&= \frac{\alpha E}{R_1}\left[\frac{1}{s+\alpha}e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{1}{s}e^{st}\Big|_{s=-\alpha}\right] = \frac{\alpha E}{R_1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right) \\
&= \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)
\end{aligned}$$

3.5

閉路方程式は以下のように表せる

$$
\begin{aligned}
&Ri_1(t) + \frac{1}{C}\int (i_1(t) - i_2(t))\,dt = Eu(t) \\
&\frac{1}{C}\int (i_2(t) - i_1(t))\,dt + Ri_2(t) + \frac{1}{C}\int (i_2(t) - i_3(t))\,dt = 0 \\
&\frac{1}{C}\int (i_3(t) - i_2(t))\,dt + Ri_3(t) = 0
\end{aligned}
$$

ここで，積分定理

$$\int i(t)dt = \frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\Big|_{t=0} = \frac{I(s)}{s} + q(0) = \frac{I(s)}{s} \qquad \text{(初期電荷は 0 としているので)}$$

を用いると，閉路方程式のラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
&\left(R + \frac{1}{sC}\right) I_1(s) - \frac{1}{sC}I_2(s) = \frac{E}{s} \\
&-\frac{1}{sC}I_1(s) + \left(\frac{1}{sC} + R + \frac{1}{sC}\right) I_2(s) - \frac{1}{sC}I_3(s) = 0 \\
&-\frac{1}{sC}I_2(s) + \left(\frac{1}{sC} + R\right) I_3(s) = 0
\end{aligned}
$$

見やすくするために全ての式の両辺に s/R を乗じて行列形式で表すと

$$\begin{bmatrix} s+\alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & s+2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & s+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{ここで}\alpha = \frac{1}{CR}\right)$$

上式の行列式は

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (s+\alpha)^2(s+2\alpha) - 2\alpha^2(s+\alpha) = (s+\alpha)\left\{s^2 + 3\alpha s + 2\alpha^2 - 2\alpha^2\right\} \\
&= (s+\alpha)(s^2 + 3\alpha s) = s(s+\alpha)(s+3\alpha)
\end{aligned}
$$

Cramer の公式より

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} E/R & -\alpha & 0 \\ 0 & s+2\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & s+\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(s+\alpha)(s+2\alpha)E/R - \alpha^2 E/R}{s(s+\alpha)(s+3\alpha)} = \frac{E}{R}\frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s+\alpha)(s+3\alpha)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+\alpha & E/R & 0 \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & s+\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha(s+\alpha)E/R}{s(s+\alpha)(s+3\alpha)} = \frac{\alpha E}{R}\frac{1}{s(s+3\alpha)}$$

$$I_3(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+\alpha & -\alpha & E/R \\ -\alpha & s+2\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha^2 E/R}{s(s+\alpha)(s+3\alpha)} = \frac{\alpha^2 E}{R}\frac{1}{s(s+\alpha)(s+3\alpha)}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$，$I_3(s)$ を留数演算を用いてラプラス逆変換すると

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_1(s)\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+\alpha)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-\alpha} + (s+3\alpha)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{E}{R}\frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{(s+\alpha)(s+3\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{E}{R}\frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s+3\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=-\alpha} + \frac{E}{R}\frac{s^2 + 3\alpha s + \alpha^2}{s(s+\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{6}e^{-3\alpha t}\right) = \frac{E}{6R}\left(2 + 3e^{-\alpha t} + e^{-3\alpha t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_2(s)\} = sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3\alpha)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha E}{R}\frac{1}{(s+3\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{\alpha E}{R}\frac{1}{s}e^{st}\Bigg|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha E}{R}\left(\frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{3\alpha}e^{-3\alpha t}\right) = \frac{E}{3R}\left(1 - e^{-3\alpha t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_3(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_3(s)\} = sI_3(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+\alpha)I_3(s)e^{st}\Big|_{s=-\alpha} + (s+3\alpha)I_3(s)e^{st}\Big|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2 E}{R}\frac{1}{(s+\alpha)(s+3\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=0} - \frac{\alpha^2 E}{R}\frac{1}{s(s+3\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=-\alpha} + \frac{\alpha^2 E}{R}\frac{1}{s(s+\alpha)}e^{st}\Bigg|_{s=-3\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2 E}{R}\left(\frac{1}{3\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{6\alpha^2}e^{-3\alpha t}\right) = \frac{E}{6R}\left(2 - 3e^{-\alpha t} + e^{-3\alpha t}\right)
\end{aligned}
$$

3.6

回路に流れる電流を $i(t)$ とすると回路方程式は

$$\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=e_s(t)$$

と与えられる．電圧源 $e_s(t)$ をラプラス変換すると

$$e_s(t)=\int_0^\infty e_s(t)e^{-st}dt=\int_0^T Ee^{-st}dt=\left[E\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T=E\frac{e^{-Ts}-1}{-s}=E\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

であるので，回路方程式のラプラス変換は

$$L\left\{sI(s)-i(0)\right\}+RI(s)=\frac{E}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)$$

初期電流は 0 なので

$$sLI(s)+RI(s)=\frac{E}{s}\left(1-e^{-Ts}\right)$$

$I(s)$ について解くと

$$I(s)=\frac{E}{s(sL+R)}\left(1-e^{-Ts}\right)=F(s)\left(1-e^{-Ts}\right)\qquad\left(\text{ここで } F(s)=\frac{E/L}{s(s+R/L)}\right)$$

留数演算を用いて $F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求めると

$$\begin{aligned}f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=sF(s)e^{st}\big|_{s=0}+(s+R/L)F(s)e^{st}\big|_{s=-R/L}\\ &= \frac{E/L}{(s+R/L)}e^{st}\bigg|_{s=0}+\frac{E/L}{s}e^{st}\bigg|_{s=-R/L}\\ &= E/R-E/Re^{-Rt/L}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)\qquad\left(\text{ここで } \alpha=\frac{R}{L}\right)\end{aligned}$$

したがって，$I(s)$ のラプラス逆変換は加法定理と推移定理を用いて

$$\begin{aligned}i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}-\mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-Ts}\}\\ &= f(t)-f(t-T)\\ &= \frac{E}{R}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)-\frac{E}{R}\left(1-e^{-\alpha(t-T)}\right)u(t-T)\end{aligned}$$

以上より，$v_R(t)$，$v_L(t)$ は

$$v_R(t)=Ri(t)=E\left\{\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)-\left(1-e^{-\alpha(t-T)}\right)u(t-T)\right\}$$

$$v_L(t)=e_s(t)-Ri(t)=\{u(t)-u(t-T)\}-Ri(t)=E\left\{e^{-\alpha t}u(t)-e^{-\alpha(t-T)}u(t-T)\right\}$$

いま，$L/R>>T$ とすると

$$\begin{aligned}&L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=e_s(t)\quad\to\quad\frac{di(t)}{dt}+(L/R)^{-1}i(t)=e_s(t)/L\quad\to\quad\frac{di(t)}{dt}\simeq e_s(t)/L\\ &\to\quad i(t)=\frac{1}{L}\int e_s(t)dt\quad\to\quad v_R(t)=Ri(t)=\frac{R}{L}\int e_s(t)dt\end{aligned}$$

となり，$v_R(t)$ は $e_s(t)$ の積分に比例する．

一方，$L/R<<T$ とすると

$$\begin{aligned}&L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=e_s(t)\quad\to\quad(L/R)\frac{di(t)}{dt}+i(t)=e_s(t)/R\quad\to\quad i(t)\simeq e_s(t)/R\\ &\to\quad v_L=L\frac{di(t)}{dt}=\frac{L}{R}\frac{de_s(t)}{dt}\end{aligned}$$

となり，$v_L(t)$ は $e_s(t)$ の微分に比例する．

3.7

回路に流れる電流を $i(t)$ とすると，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e_s(t) \qquad \to \qquad \frac{di(t)}{dt} + i(t) = e_s(t)$$

ここで，電源電圧のラプラス変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{e_s(t)\} &= \int_0^\infty e_s(t)dt = \int_0^1 te^{-st}dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{s}e^{-st}dt = -\frac{e^{-s}}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^1 \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}
\end{aligned}$$

微分定理から

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = sI(s) - i(0) = sI(s) \qquad\qquad (初期電流は\ 0)$$

の関係を利用して，回路方程式をラプラス変換すると

$$sI(s) + I(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

$I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

ここで，留数演算を利用すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} &= \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}e^{st}\right)\bigg|_{s=0} + \frac{1}{s^2}e^{st}\bigg|_{s=-1} \\
&= \left(\frac{-1}{(s+1)^2}e^{st} + \frac{t}{s+1}e^{st}\right)\bigg|_{s=0} + e^{-t} \\
&= -1 + t + e^{-t} = \left(-1 + t + e^{-t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

また，ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = tu(t)$$

推移定理を用いると

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}e^{-s}\right\} = (t-1)u(t-1)$$

よって

$$\begin{aligned}
i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \left(-1 + t + e^{-t}\right)u(t) + (t-1)u(t-1) \\
&= (t-1)\left(u(t) - u(t-1)\right) + e^{-t}u(t)
\end{aligned}$$