2.1

(1)

回路方程式

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

初期条件

$$t = 0 \text{ で } i(0) = 0$$

回路方程式から，定常解と過渡解を求める

• 定常解 $(d/dt = 0)$

$$Ri_s(t) = E \qquad \rightarrow \qquad i_s(t) = \frac{E}{R}$$

• 過渡解 (E=0)

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$
$$\frac{di_t(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_t(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \qquad (A : \text{未知定数})$$

以上より，一般解は以下のように与えられる

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

次に，初期条件から未知定数 A を決定する．$t = 0$ で $i(0) = 0$ なので，これを上式に代入すると

$$\frac{E}{R} + A = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{E}{R}$$

よって，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \left(\text{時定数 :}\tau = \frac{L}{R}\right)$$

具体的な数値を代入すると

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{10}{5}\left(1 - e^{-\frac{5}{10\times10^{-3}}t}\right) = 2\left(1 - e^{-500t}\right) \text{ A} \\
v_R(t) &= Ri(t) = 10\left(1 - e^{-500t}\right) \text{ V} \\
v_L(t) &= L\frac{di(t)}{dt} = (10\times10^{-3})\times 2\times(+500)e^{-500t} = 10e^{-500t} \text{ V}
\end{aligned}$$

(2)

$$\text{時定数は}\tau = \frac{L}{R} = \frac{10\times10^{-3}}{5} = 2\times10^{-3} \text{ s} = 2 \text{ ms}$$

$$i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = \frac{10}{5}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 1.3 \text{ A}$$

(2)

$$\begin{aligned}
v_R(t) = v_L(t) \qquad \rightarrow \qquad & 10\left(1 - e^{-500t}\right) = 10e^{-500t} \\
& 1 = 2e^{-t/\tau} \\
& e^{t/\tau} = 2 \\
& t/\tau = \ln 2 \qquad \rightarrow \qquad t = \tau\ln 2 = 2\times10^{-3}\ln 2 \simeq 1.4 \text{ ms}
\end{aligned}$$

2.2

$0 \leq t << 0.1$ s の解は，問 2.1 の結果をそのまま使うと

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \qquad \left(\text{時定数：}\tau = \frac{L}{R}\right)$$

と書ける．具体的に数値を代入すると

$$i(t) = \frac{10}{10}\left(1 - e^{-10t}\right) = \left(1 - e^{-10t}\right) \text{ A}$$

次に，$t > 0.1$ s の解を求める，この場合，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = -E_2, \qquad (\text{電圧源の向きが逆であることに注意する})$$

であり，初期条件は $t = 0.1$ s で

$$i(0.1) = \left(1 - e^{-1}\right) \text{ A}$$

である．問 9.1 のときと同様にして，定常解と過渡解を求めると

- 定常解 $(d/dt = 0)$

$$Ri_s(t) = -E_2 \quad \rightarrow \quad i_s(t) = -\frac{E_2}{R}$$

- 過渡解 $(E_2 = 0)$

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = A_2 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (A_2\text{：未知定数})$$

$$i_t(t) = A_2' e^{-\frac{R}{L}(t-0.1)}, \quad \left(A_2' = A_2 e^{-\frac{0.1R}{L}}\text{：後の計算を簡単にするため}\right)$$

以上より，一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = -\frac{E_2}{R} + A_2' e^{-\frac{R}{L}(t-0.1)} = -0.5 + A_2' e^{-10(t-0.1)}$$

$t = 0.1$ s での初期条件を用いると

$$i(0.1) = -0.5 + A_2' = \left(1 - e^{-1}\right) \quad \rightarrow \quad A_2' = 1.5 - e^{-1}$$

以上より，

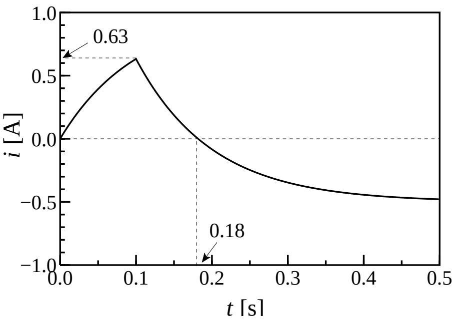
$$i(t) = -0.5 + \left(1.5 - e^{-1}\right) e^{-10(t-0.1)} \simeq -0.5 + 1.13e^{-10(t-0.1)} \text{ A}$$

以上をまとめると

$$0 \leq t \leq 0.1 \text{ s：} \quad i(t) = \left(1 - e^{-10t}\right) \text{ A}$$

$$t \geq 0.1 \text{ s：} \quad i(t) \simeq -0.5 + 1.13e^{-10(t-0.1)} \text{ A}$$

グラフは以下のようになる



2.3

回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

初期条件は

$$t = 0 \text{ で } q = q_0 = 5 \text{ C}$$

電流と電荷の間の関係 $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ より，回路方程式は以下のように書き直せる．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

一般解を得るために，定常解と過渡解を求める

• 定常解 $(d/dt = 0)$

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$$

• 過渡解 $(E = 0)$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (\text{時定数}：\tau = CR = 10 \text{ s})$$

以上より，一般解は以下のように書ける

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

未知定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を用いると

$$q(0) = CE + A = q_0 \quad \rightarrow \quad A = q_0 - CE$$

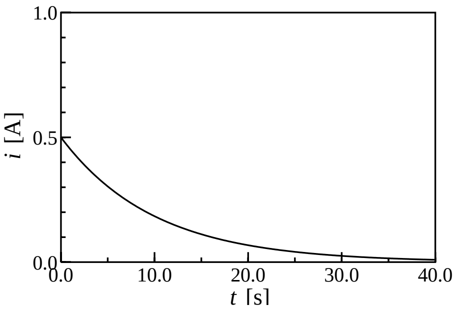
よって，$q(t)$ は以下のように求まる．

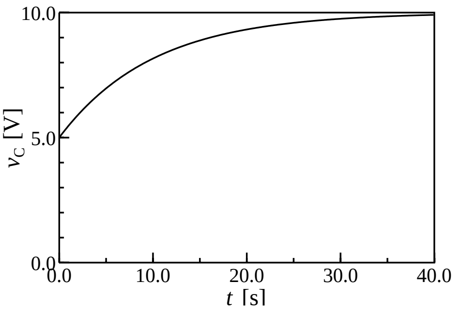
$$\begin{aligned} q(t) &= CE + (q_0 - CE)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 \times 10 + (5 - 1 \times 10)e^{-t/10} \\ &= 10 - 5e^{-t/10} \end{aligned}$$

回路に流れる電流 i とコンデンサにかかる電圧 v_C は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -5 \times (-1/10)e^{-t/10} = 0.5e^{-t/10} \\ v_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = 10 - 5e^{-t/10} \end{aligned}$$

電流 i，電圧 v_C のグラフは以下のように書ける．





2.4

回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

初期条件は

$$t = 0 \text{ で } q = q_0 = CE_0$$

問 2.3 の結果を利用すると，一般解は以下のように求まる (電源がつながっていないので 9.2 の一般解で $E = 0$ とする)

$$q(t) \quad = \quad q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad\qquad (\tau = CR)$$

時刻 t_1 秒においてコンデンサにかかっている電圧は

$$v_C(t_1) = \frac{q(t_1)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{CE_0}{C} e^{-\frac{t_1}{CR}} = E_0 e^{-\frac{t_1}{CR}} = E_1$$

上式を C について解くと

$$e^{\frac{t_1}{CR}} = \frac{E_0}{E_1}$$

$$\frac{t_1}{CR} = \ln(E_0/E_1)$$

$$C = \frac{t_1}{R\ln(E_0/E_1)}$$

2.5
講義ノートより，$t=t_0$ で RC 直列回路に直流電圧 E を印加したときの過渡現象は，コンデンサの初期電荷を q_0 として以下のように書ける．(**講義ノートをよく見直してください**)

$$q(t) = CE + (q_0 - CE)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$i(t) = \frac{q(t)}{dt} = \frac{E - q_0/C}{R}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$v_R(t) = Ri(t) = (E - q_0/C)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = \{E - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$
$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E + (q_0/C - E)\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = E + \{v_C(t_0) - E\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)$$

また，この回路の時定数は $\tau = RC = (1\times 10^3)\times(10\times 10^-6) = 10\times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{ms}$ である．

(1)
$0 \le t \le 50$ ms の間の解は (初期条件：$t=0$ ms で $q_0 = 0$)

$$v_R(t) = E\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = 10\exp(-100t) \qquad (t \text{ の単位は s とする})$$
$$v_C(t) = E\left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right\} = 10\{1 - \exp(-100t)\}$$

また，$t = 50$ ms のとき

$$v_C(t = 50\times 10^{-3}) = 10\left\{1 - \exp\left(-50\times 10^{-3}/100\right)\right\} = 10(1 - e^{-5})$$

$t \ge 50$ ms の解は

$$\begin{aligned} v_R(t) &= \{0 - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = -10(1-e^{-5})\exp\left(-100(t - 50\times 10^{-3})\right) \\ &= -10(1-e^{-5})\exp(-(100t - 5)) \\ v_C(t) &= 0 + \{v_C(t_0) - 0\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \\ &= 10(1-e^{-5})\exp(-(100t-5)) \end{aligned}$$

グラフは教科書を参照してください．

(2)
$0 \le t \le 10$ ms の間の解は (1) と同じ．
$t = 10$ ms のとき

$$v_C(t = 10\times 10^{-3}) = 10\left\{1 - \exp\left(-10\times 10^{-3}/100\right)\right\} = 10(1 - e^{-1})$$

$t \ge 10$ ms の解は

$$\begin{aligned} v_R(t) &= \{0 - v_C(t_0)\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) = -10(1-e^{-1})\exp\left(-100(t - 10\times 10^{-3})\right) \\ &= -10(1-e^{-1})\exp(-(100t - 1)) \\ v_C(t) &= 0 + \{v_C(t_0) - 0\}\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \\ &= -10(1-e^{-1})\exp(-(100t-1)) \end{aligned}$$

グラフは教科書を参照してください．

2.6

キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$i(t) = dq(t)/dt$ (単位時間にコンデンサに蓄えられる電荷は回路に流れた電流に等しい) というい関係式を用いると以下の式を得る．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

定常解 $q_s(t)$ および過渡解 $q_t(t)$ の満たす微分方程式は

$$R\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

である．(実際に $q(t) = q_s(t) + q_t(t)$ が回路方程式を満足することが確かめられる) まず，定常解について解く．定常状態に対する解は交流回路理論を用いると，$d/dt \to j\omega$ として

$$j\omega RQ_s + \frac{Q_s}{C} = E_m e^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと以下のように求まる．

$$Q_s = \frac{CE_m e^{j\theta}}{1 + j\omega CR} = CE_m e^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{-j\phi'} = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}e^{j(\theta-\phi')}$$
$$\left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right)$$

以上より，定常解は

$$q_s(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') \qquad \left(Q_m = \frac{CE_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)$$

と求まる．

一方，過渡解に対する回路方程式は直流電源を接続した場合の式と同じで，その一般解は

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} \qquad (A \ :\ \text{積分定数})$$

である．したがて，電荷 $q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') + Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

で与えられる．初期条件として $t = 0$ で $q(t = 0) = 0$ を代入すると

$$q(0) = Q_m \sin(\theta - \phi') + A = 0 \qquad \to \qquad A = -Q_m \sin(\theta - \phi')$$

のように A が求まる．したがって，電荷の時間変化 $q(t)$ は

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_m \sin(\omega t + \theta - \phi') - Q_m \sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}} \\ &= Q_m \left\{\sin(\omega t + \theta - \phi') - \sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \end{aligned}$$

と求まり，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = Q_m \left\{\omega \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{1}{CR}\sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\ &= \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C \cos(\omega t + \theta - \phi') + \frac{1}{R}\sin(\theta - \phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}, \qquad \left(\phi' = \tan^{-1}(\omega CR)\right) \end{aligned}$$

となる．教科書の解にするためにはさらに以下の変形を行う

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left\{\omega C\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{R}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{1/(\omega C)^2+R^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{\omega CR}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\phi')+\frac{1}{\tan\phi'}\sin(\theta-\phi')e^{-\frac{t}{CR}}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\tan\phi = \dfrac{1}{\omega CR}$ とおくと，以下の関係が成り立つ $(\tan\phi' = \omega CR)$

$$
\begin{aligned}
&\tan\phi\cdot\tan\phi' = 1 \\
&\phi+\phi' = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

上式を用いて $i(t)$ の式を変形すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\omega t+\theta-\pi/2+\phi)+\tan\phi\sin(\theta-\pi/2+\phi)e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\cos(\pi/2-(\omega t+\theta+\phi))-\tan\phi\sin(\pi/2-(\theta+\phi))e^{-\frac{t}{CR}}\right\} \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+1/(\omega C)^2}}\left\{\sin(\omega t+\theta+\phi)-\tan\phi\cos(\theta+\phi)e^{-\frac{t}{CR}}\right\}
\end{aligned}
$$

なお，上式の変形には以下の三角関数の関係式を用いた

$$
\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\sin(\pi/2-x) &= \cos x \\
\cos(\pi/2-x) &= \sin x
\end{aligned}
$$

2.7

図の LC 直列回路の回路方程式は，回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = E$$

で与えられる．

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は (直流電源なので $d/dt \to 0$) として，

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E = 0$ とした

$$L\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

の解を求める．上式の特性方程式は

$$Lm^2 + \frac{1}{C} = 0$$

であり，その根は

$$m = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0, \quad \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

であるので，以下の解を得る

$$q_t(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t, \quad (A_1, A_2\text{は積分定数})$$

したがって，一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 A_1\sin\omega_0 t + \omega_0 A_2\cos\omega_0 t$$

である．

次に，**初期条件**を考慮して，積分定数 A_1, A_2 を決定する．$t = 0$ での初期条件は，$q(t) = 0$ と $i(t) = dq(t)/dt = 0$ であるので．積分定数は A_1, A_2 は以下のように求まる

$$\begin{aligned} q(0) &= CE + A_1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = -CE \\ i(0) &= \omega_0 A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0 \end{aligned}$$

よって，求める解は

$$q(t) = CE - CE\cos\omega_0 t = CE\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \omega_0 CE\sin\omega_0 t = \frac{1}{\sqrt{LC}}CE\sin\omega_0 t = E\frac{C}{\sqrt{L}}\sin\omega_0 t$$

である．ここに $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ である．

2.8

RLC 直列回路の回路方程式は回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

で与えられる．各素子値を上式に代入すると，以下の式を得る．

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 10$$

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は (直流電源なので $d/dt \rightarrow 0$) として，

$$2q_s(t) = 10 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 5$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E = 0$ とした

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 0$$

の解を求める．上式の特性方程式は

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m+1)(m+2) = 0$$

であり，その根は $m = -1, -2$ であるので，以下の解を得る

$$q_t(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} \quad (A_1, A_2 \text{は積分定数})$$

したがって，一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 5 + A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

と求まる．また，回路に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t}$$

である．

次に，**初期条件**を考慮して，積分定数 A_1, A_2 を決定する．$t = 0$ での初期条件は，$q(t) = 0$ と $i(t) = dq(t)/dt = 0$ であるので．以下の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} q(0) &= 5 + A_1 + A_2 = 0 \quad \cdots (A) \\ i(0) &= -A_1 - 2A_2 = 0 \quad \cdots (B) \end{aligned}$$

(B) 式より

$$A_1 = -2A_2 \quad \cdots (C)$$

であるので，これを (A) 式に代入すると

$$5 - 2A_2 + A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = 5$$

と求まり，これを (C) 式に代入すると

$$A_1 = -2A_2 = -10$$

である．

よって，求める解 $i(t)$ は

$$i(t) = -A_1e^{-t} - 2A_2e^{-2t} = 10e^{-t} - 10e^{-2t} = 10\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

と求まる．

RLC 直列回路の一般的な解

RLC 直列回路の回路方程式は回路に流れる電流を $i(t)$，コンデンサの電荷を $q(t)$ として，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \qquad \rightarrow \qquad L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

で与えられる．

定常解 $q_s(t)$ と 過渡解 $q_t(t)$ に分けて考えると，定常解に対する解は (直流電源なので $d/dt \rightarrow 0$) として，

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = CE$$

と求まる．

過渡解 $q_t(t)$ は，回路方程式の右辺を $E = 0$ とした

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

の解を求める．いま，上式の解を $q(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= A\frac{d}{dt}\left(e^{mt}\right) = mAe^{mt} \\ \frac{d^2q(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) = mA\frac{d}{dt}\left(e^{mt}\right) = m^2Ae^{mt} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} &Lm^2Ae^{mt} + RmAe^{mt} + \frac{1}{C}Ae^{mt} = 0 \\ &\left(Lm^2 + Rm + \frac{1}{C}\right)Ae^{mt} = 0 \end{aligned}$$

$Ae^{mt} \neq= 0$ であるので，以下の式を得る．

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$$

上式は**特性方程式**と呼ばれる．上式は 2 次方程式であり，以下の 3 種類の解を持つ

1. 相異なる 2 つの実数解 (これを $m = m_1, m_2$ とする)

$$q_t(t) = A_1e^{m_1t} + A_2e^{m_2t}$$

2. 重解 (これを $m = m_1 = m_2$ とする)

$$q_t(t) = (A_1 + A_2t)\,e^{mt}$$

3. 相異なる 2 つの複素数解 (これを $m = \lambda \pm j\mu$ とする)

$$q_t(t) = (A_1\cos\mu t + A_2\sin\mu t)\,e^{\lambda t}$$

ここに A_1, A_2 は積分定数である．また，m の解の具体的な形は，2 次方程式の解の公式より

$$m = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4(L/C)}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{R}{2L} &\quad : \quad \text{減衰定数} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} &\quad : \quad \text{固有角振動数} \end{aligned}$$

である．

以下，初期条件を考慮して，3 種類のそれぞれの解に対して，電荷 $q(t)$ と 電流 $i(t)$ の一般解を求める．初期条件としては $t = 0$ で $q(0) = 0$，$i(0) = 0$ とする．

1. m が相異なる 2 つの実数解を持つ場合 (過制動)

$\alpha > \omega_0$ の場合であり，$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ とすると

$$q(t) = CE + A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = CE + e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}\right)$$

ここで，以下の関係式

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

を用いて，$q(t)$ を以下のように表記し直す

$$q(t) = CE + Be^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)$$

ここに B と ϕ は初期条件により決まる定数である．$i(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -\alpha B e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi) + Be^{-\alpha t}\beta\cosh(\beta t + \phi) \\ &= Be^{-\alpha t}\left(-\alpha\sinh(\beta t + \phi) + \beta\cosh(\beta t + \phi)\right) \end{aligned}$$

なお，この導出には以下の関係式を用いた

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\cosh t\right) = \sinh t$$
$$\frac{d}{dt}\left(\sinh t\right) = \cosh t$$

初期条件より以下の連立方程式を得る

$$q(0) = CE + B\sinh\phi = 0$$
$$i(0) = B(-\alpha\sinh\phi + \beta\cosh\phi)\sinh\phi = 0$$

上式を解くと，

$$-\alpha\sinh\phi + \beta\cosh\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \rightarrow \quad \tanh\phi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\cosh^2\phi} = 1 - \tanh^2\phi \quad \rightarrow \quad \cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

$$\sinh\phi = \cosh\phi\tanh\phi = \frac{\beta}{\omega_0}$$

$$B = -\frac{CE}{\sinh\phi} = -CE\frac{\omega_0}{\beta}$$

したがって

$$q(t) = CE\left(1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)\right)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left(-\alpha\sinh(\beta t + \phi) + \beta\cosh(\beta t + \phi)\right) \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(\sinh\beta t\cosh\phi + \cosh\beta\sinh\phi\right) + \beta\left(\cosh\beta t\cosh\phi + \sinh\beta\sinh\phi\right)\right] \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\sinh\beta t + \frac{\beta}{\omega_0}\cosh\beta t\right) + \beta\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\cosh\beta t + \frac{\beta}{\omega_0}\sinh\beta t\right)\right] \\ &= -CE\frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\omega_0}\sinh\beta t \\ &= CE\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh\beta t = \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t \end{aligned}$$

前ページの式変形には，以下の公式を用いた

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$

ここで，三角関数と双曲線関数の関係について示しておく．$x = jx'$ とすると

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{e^{x'} - e^{-x'}}{2j} = -j\sinh x'$$
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{e^{x'} + e^{-x'}}{2} = \cosh x'$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-j\sinh x'}{\cosh x'} = -j\tanh x'$$

したがって，三角関数の公式から双曲線関数の公式を導出できる．
加法定理は以下のようになる

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
&\quad \rightarrow \quad -j\sinh(\alpha' \pm \beta') = -j\sinh\alpha'\cosh\beta' \pm \cosh\alpha'(-j\sinh\beta') \\
&\quad \rightarrow \quad \sinh(\alpha' \pm \beta') = \sinh\alpha'\cosh\beta' \pm \cosh\alpha'\sinh\beta'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
&\quad \rightarrow \quad \cosh(\alpha' \pm \beta') = \cosh\alpha'\cosh\beta' \mp (-j\cosh\alpha')(-j\sinh\beta') \\
&\quad \rightarrow \quad \cosh(\alpha' \pm \beta') = \cosh\alpha'\cosh\beta' \pm \sinh\alpha'\sinh\beta'
\end{aligned}$$

また，他の公式も

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
&\quad \rightarrow \quad (\cosh x')^2 + (-j\sinh x')^2 = 1 \\
&\quad \rightarrow \quad \cosh^2 x' - \sinh^2 x' = 1
\end{aligned}$$

などと求めることができる．

また，以下の関係も成り立つ

$$\sinh(jx) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2} = j\sin x$$
$$\cosh(jx) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$$
$$\tanh(jx) = \frac{j\sin x}{\cos x} = j\tan x$$

この関係を使うと，特性方程式が異なる 2 つの複素数解を持つ 3 の結果は，既に求めた，特性方程式が異なる 2 つの実数解を持つ 1 の結果を変形することで求められる．

3．m が相異なる 2 つの複素数解を持つ場合 (減衰振動)

$\alpha < \omega_0$ の場合，$m = -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm j\omega$ と書ける．すなわち，1 の解で $\beta = j\omega$ と置くと，以下の解が容易に求まる．

$$\begin{aligned} q(t) &= CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{j\omega}\sinh(j\omega t + \phi)\right] = CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{j\omega}\cdot j\sin\left(\omega t + \phi'\right)\right] \\ &= CE\left[1 - e^{-\alpha t}\frac{\omega_0}{\omega}\sin\left(\omega t + \phi'\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{j\omega L}e^{-\alpha t}\sinh(j\omega t) = \frac{E}{j\omega L}e^{-\alpha t}\cdot j\sin(\omega t) \\ &= \frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1}$$

ただし

$$\omega = -j\beta = -j\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\begin{aligned} &\tanh\phi = \frac{\beta}{\alpha} \\ &\quad\rightarrow\quad \tanh j\phi' = \frac{j\omega}{\alpha} \\ &\quad\rightarrow\quad j\tan\phi' = \frac{j\omega}{\alpha} \\ &\quad\rightarrow\quad \tan\phi' = \frac{\omega}{\alpha} \end{aligned}$$

2. m が重解を持つ場合 (臨界制動)

$\alpha = \omega_0$ の場合であり $m = -\alpha$ となるので

$$q(t) = CE + (A_1 + A_2 t)\, e^{-\alpha t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = [A_2 - \alpha(A_1 + A_2 t)]\, e^{-\alpha t}$$

$t = 0$ で $q(0) = 0$ と $i(0) = 0$ を用いると

$$q(0) = CE + A_1 = 0$$
$$i(0) = A_2 - \alpha A_1 = 0$$

これを解くと

$$A_1 = -CE, \quad A_2 = \alpha A_1 = -\alpha CE$$

したがって，求める解は

$$q(t) = CE + (-CE + -\alpha CEt)\, e^{-\alpha t} = CE \left[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}\right]$$

$$\begin{aligned} i(t) &= [-\alpha CE - \alpha(-CE - \alpha CEt)]\, e^{-\alpha t} \\ &= \left[\alpha^2 CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \left[\omega_0^2 CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \left[\frac{1}{LC} CEt\right] e^{-\alpha t} \\ &= \frac{E}{L} t e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

1. m が相異なる 2 つの実数解を持つ場合 (過制動)
(別解 (指数関数のまま解いてから双曲線関数にする))

電荷 $q(t)$ と電流 $i(t)$ の一般解はもともと以下のように書けていた

$$\begin{aligned} q(t) &= CE + A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} = CE + A_1 e^{-(\alpha+\beta)t} + A_2 e^{-(\alpha-\beta)t} \\ i(t) &= m_1 A_1 e^{m_1 t} + m_2 A_2 e^{m_2 t} = -(\alpha+\beta)A_1 e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha-\beta)A_2 e^{-(\alpha-\beta)t} \end{aligned}$$

ここに $m_1 = -\alpha - \beta$, $m_2 = -\alpha + \beta$ である．

$t = 0$ での初期条件 $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ より．

$$\begin{aligned} q(t) &= CE + A_1 + A_2 = 0 \\ i(t) &= -(\alpha+\beta)A_1 - (\alpha-\beta)A_2 = 0 \end{aligned}$$

これを行列の形で表現すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(\alpha+\beta) & -(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -CE \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

左辺の行列の逆行列を求めて上式を解くと

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\beta} \begin{bmatrix} -(\alpha-\beta) & -1 \\ \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CE \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{CE}{2\beta} \begin{bmatrix} (\alpha-\beta) \\ -(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

よって，求める解は

$$\begin{aligned} q(t) &= CE\left[1 + \frac{1}{2\beta}\left\{(\alpha-\beta)e^{-(\alpha+\beta)t} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha-\beta)t}\right\}\right] \\ &= CE\left[1 - \frac{1}{2\beta}e^{-\alpha t}\left\{\alpha\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right) + \beta\left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right)\right\}\right] \\ &= CE\left[1 - \frac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\left(\alpha \sinh\beta t + \beta\cosh\beta t\right)\right] \\ &= CE\left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\sinh\beta t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\cosh\beta t\right)\right] \\ &= CE\left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\left(\sinh\beta t\cosh\phi + \cosh\beta t\sinh\phi\right)\right], \qquad \left(\tanh\phi = \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= CE\left[1 - \frac{\omega_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \phi)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{CE}{2\beta}\left[-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)e^{-(\alpha+\beta)t} + (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)e^{-(\alpha-\beta)t}\right] \\ &= \frac{CE}{2\beta}e^{-\alpha t}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right)\right] \\ &= \frac{CE}{\beta}e^{-\alpha t}\omega_0^2\sinh\beta t \\ &= \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh\beta t \end{aligned} \tag{4}$$