平成 22 年度電気回路 I 中間試験 (6 月 22 日実施)

1. 変成器を含む回路について以下の問いに答よ．ただし，$V = 20$ V，電源の周波数を $f = 50$ Hz とする．

   (a) 図 1 に示す回路で，$L_1 = \frac{1}{5\pi}$ H，$L_2 = \frac{1}{20\pi}$ H，$M = \frac{2}{25\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{400\pi}$ F，$C_2 = \frac{1}{500\pi}$ F とするとき，コンデンサ C_2 に流れる電流を求めよ．

   (b) 設問 (a) のとき変成器の結合係数 k を求めよ．

   (c) 図 1′ に示すような理想変成器を含む回路で，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 20\ \Omega$，1 次側と 2 次側の巻き数比が $1 : n$ であり，$n = 3$ のとき，抵抗 R_2 に流れる電流を求めよ．

2. (a) 図 2 に示す回路の閉路方程式を立てるための閉路電流を示し，閉路方程式を行列の形で表せ (解く必要はない)．

   (b) 図 3 に示す回路の節点方程式を立てるための節点を示し，節点方程式を行列の形で表現し，それを解くことにより節点電位を求め，抵抗 R_2 に流れる電流を求めよ．ただし，節点 0 は図に示した位置とし，$R_1 = 1.5\ \Omega$，$R_2 = R_3 = R_4 = 3\ \Omega$，$L = \frac{3}{200\pi}$ H，$C = \frac{1}{300\pi}$ F，$I_1 = 4$ A，$I_2 = 1$ A，$I_3 = 2$ A，$f = 50$ Hz とする．

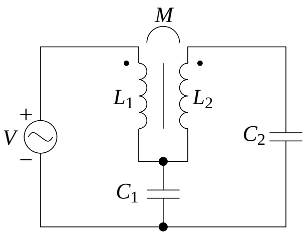


図 1

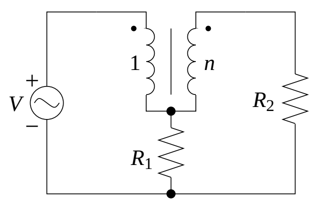


図 1′

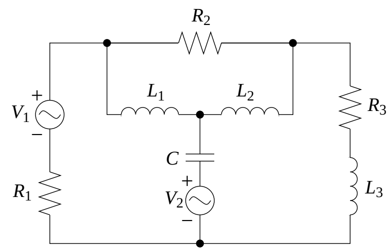


図 2

3. 図 4 の回路の $R_0 = 10\ \Omega$ に関する逆回路を書け．ただし，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 20\ \Omega$，$L_1 = 50$ mH，$L_2 = 100$ mH，$C = 50\ \mu$F とする．

4. 図 5 の回路において，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 30\ \Omega$，$R_3 = 10\ \Omega$，$C = \frac{1}{600\pi}$ F，$V_1 = 30$ V，$I_2 = 3$ A，$f = 50$ Hz とする．

   (a) 図 5 の回路の端子 $1 - 1'$ から左の電源回路のテブナン等価回路を求めよ．また，テブナン等価回路からノルトン等価回路を求めよ．

   (b) 図 5 の回路の負荷抵抗 R_L での消費電力を最大にするには，L，R_L をどのような値にすれば良いか．また，そのときの R_L での消費電力 $P_{\max}$ を求めよ．

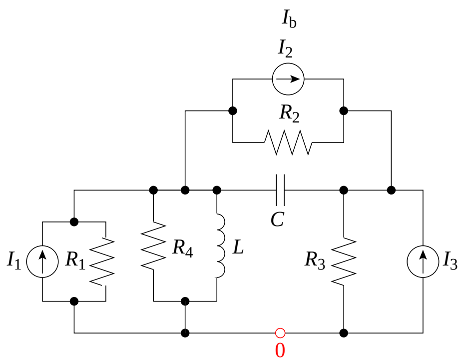


図 3

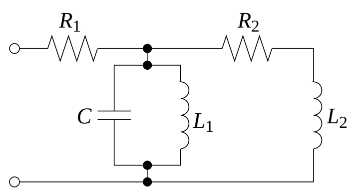


図 4

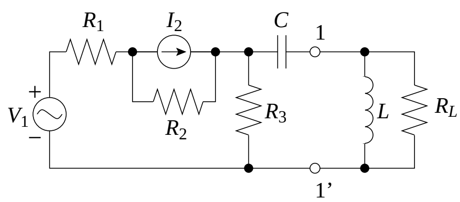


図 5

1. (a) 図のように電圧，電流を設定する．このとき，変成器の基本式より

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad \rightarrow \quad V_2 = j20I_1 + j8I_2$$
$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \quad \rightarrow \quad V_2 = j5I_2 + j8I_1$$

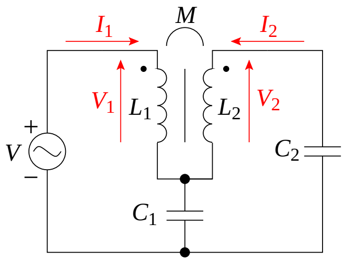
である．これとキルヒホッフの電圧則を考慮すると

$$\begin{aligned} V &= V_1 + \frac{I_1 + I_2}{j\omega C_1} \quad \rightarrow \quad 20 = j20I_1 + j8I_2 - j4(I_1 + I_2) \quad \rightarrow \quad -j5 = 4I_1 + I_2 \\ 0 &= V_2 + \frac{I_1 + I_2}{j\omega C_1} + \frac{I_2}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad 0 = j5I_2 + j8I_1 - j4(I_1 + I_2) - j5I_2 \quad \rightarrow \quad 0 = I_1 - I_2 \end{aligned}$$

この連立方程式を解くと

$$-j5 = 5I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = -j \text{ A} \quad (\text{図の下から上の向きを正とする})$$

別解としてT型等価回路を使っても解ける．また，電流を上から下に流れる向きに設定している場合は答えが $I_2 = j$ A となる．



(b) 変成器の結合係数は

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0.8$$

である．

(c) 理想変成器の関係式は

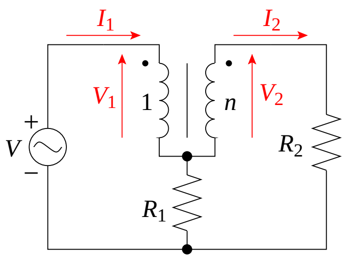
$$V_2 = nV_1 = 3V_1, \quad I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{I_1}{3}$$

であり，この関係とキルヒホッフの電圧則より

$$\begin{aligned} V = V_1 + R_1(I_1 - I_2) \quad &\rightarrow \quad 20 = V_1 + 5(3I_2 - I_2) \quad \rightarrow \quad 20 = V_1 + 10I_2 \\ V_2 + R_1(I_1 - I_2) = R_2 I_2 \quad &\rightarrow \quad 3V_1 + 5(3I_2 - I_2) = 20I_2 \quad \rightarrow \quad 3V_1 = 10I_2 \end{aligned}$$

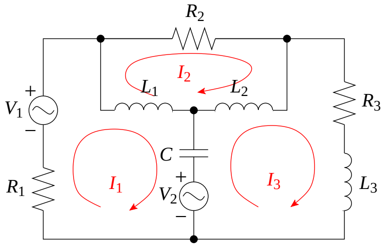
この連立方程式を解くと

$$60 = 10I_2 + 30I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{3}{2} \text{ A} \quad (\text{図の上から下の向きを正とする})$$



2. (a) 図のように閉路電流を設定すると閉路方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & -j\omega L_1 & -\frac{1}{j\omega C} \\ -j\omega L_1 & R_2 + j\omega(L_1 + L_2) & -j\omega L_2 \\ -\frac{1}{j\omega C} & -j\omega L_2 & R_3 + j\omega(L_2 + L_3) + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$



(b) 図のように節点を設定すると，節点方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 + I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) \\ -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

これに与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4-j}{3} & -\frac{1+j}{3} \\ -\frac{1+j}{3} & \frac{2+j}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

となる．ここでこの連立一次方程式を Cramer の公式を用いて解くものとすると，節点行列の行列式 Δ は

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{4-j}{3} & -\frac{1+j}{3} \\ -\frac{1+j}{3} & \frac{2+j}{3} \end{vmatrix} = \frac{(4-j)(2+j)-(1+j)^2}{9} = \frac{8+j4-j2+1-(1+j2-1)}{9} = 1$$

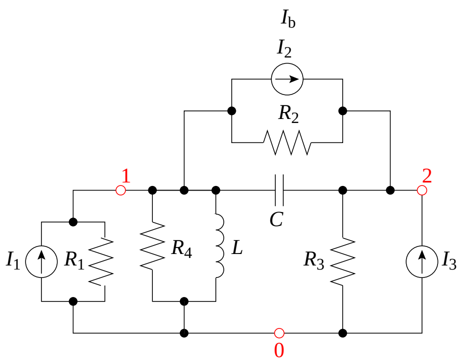
であるので，V_1，V_2 は以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -\frac{1+j}{3} \\ 3 & \frac{2+j}{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = (2+j)+(1+j) = 3+j2 \text{ V}$$

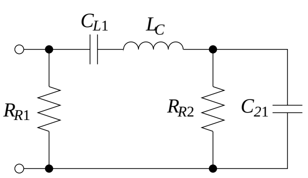
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4-j}{3} & 3 \\ -\frac{1+j}{3} & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = (4-j)+(1+j) = 5 \text{ V}$$

また，抵抗 R_2 に流れる電流 I_{R2} は左から右に流れる向きを正とすると

$$I_{R2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{3+j2-5}{3} = -\frac{2}{3}(1-j) \text{ A}$$



3. 逆回路は以下のように求まる．



$$R_{R1} = \frac{R_0^2}{R_1} = 10 \ \Omega, \qquad R_{R2} = \frac{R_0^2}{R_2} = 5 \ \Omega,$$

$$C_{L1} = \frac{L_1}{R_0^2} = 0.5 \text{ mF}, \qquad C_{L2} = \frac{L_2}{R_0^2} = 1 \text{ mF},$$

$$L_C = CR_0^2 = 5 \text{ mH}$$

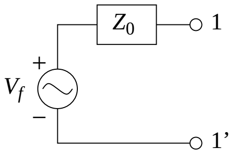
4. (a) 端子 $1-1'$ から左側の回路のテブナン等価回路を考えたとき，内部インピーダンス Z_0 は

$$Z_0 = \frac{(R_1+R_2)R_3}{(R_1+R_2)+R_3} + \frac{1}{j\omega C} = 8 - j6 \ \Omega$$

であり，開放電圧 V_f は重ね合わせの理を用いるものとして，V_1 の作る開放電圧 V_{f1} と I_2 の作る開放電圧 V_{f2} を求めると

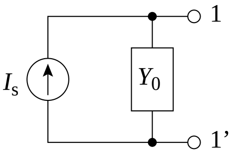
$$\begin{aligned} V_{f1} &= \frac{R_3 V_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 6\ \mathrm{V} \\ V_{f2} &= R_1 \cdot \frac{R_2 I_2}{(R_1 + R_3) + R_2} = 18\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

であるので，テブナン等価回路は以下のように書ける．



$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 + jX_0 = 8 - j6\ \Omega \\ V_f &= V_{f1} + V_{f2} = 24\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

また，ノルトン等価回路は，テブナン等価回路から以下のように求まる．



$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{4 + j3}{50}\ \mathrm{S} \\ I_s &= \frac{V_f}{Z_0} = \frac{12(4 + j3)}{25}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

(b) 負荷のアドミタンスを Y_L とすると

$$Y_L = \frac{1}{R_L} - j\frac{1}{\omega L}$$

であり，最大電力伝送定理より負荷での消費電力が最大となるのは

$$Y_L = Y_0^* \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_L} - j\frac{1}{\omega L} = \frac{4 - j3}{50}$$

のときであり，この左辺と右辺で実部同士，虚部同士が等しいと置くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_L} = \frac{4}{50} \quad &\rightarrow \quad R_L = \frac{50}{4} = 12.5\ \Omega \\ \frac{1}{\omega L} = \frac{3}{50} \quad &\rightarrow \quad L = \frac{50}{3 \cdot 100\pi} = \frac{1}{6\pi}\ \mathrm{H} \end{aligned}$$

のときに負荷での消費電力が最大になることがわかる．また，その電力 $P_{\max}$ は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{24^2}{4 \cdot 8} = 18\ \mathrm{W}$$

と求まる．