平成 22 年度電気回路 I 期末試験 (8 月 02 日実施)

1. 図 1 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t=0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする。以下の問いに答えよ。ただし，$R_1=5\ \Omega$、$R_2=15\ \Omega$、$C=10\ \mathrm{mF}$、$E=10\ \mathrm{V}$ とする．

   (a) $t=0$ でコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めよ。

   (b) $t\geq 0$ での電流と電荷の時間変化 $i(t)$，$q(t)$ を求めよ．

   (c) $t\geq 0$ で定常状態に達するまでに抵抗 R_2 で消費されるエネルギーを求めよ．

2. 図 2 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t=0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし，$R=3\ \Omega$、$L=0.2\ \mathrm{H}$、$v(t)=10\sin(5t)$ [V] とする。

   (a) $t=0$ でインダクタに流れている電流 $i(0)$ を求めよ．

   (b) $t\geq 0$ で回路に流れる電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

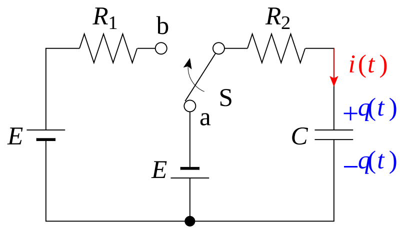

図 1

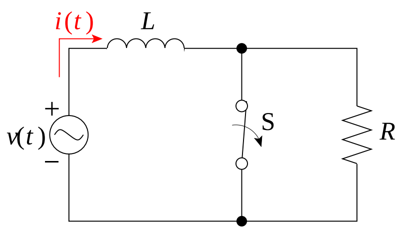

図 2

3. 図 3 に示す回路について以下の問いに答えよ。ただし、$R_1=12\ \Omega$，$R_2=8\ \Omega$，$L=2\ \mathrm{H}$，$C=\frac{1}{16}\ \mathrm{F}$，$E_1=24\ \mathrm{V}$，$E_2=4\ \mathrm{V}$ とする．

   (a) スイッチ S が閉じた状態で定常状態にあるとき，$t=0$ でスイッチを開く場合を考える。$t\geq 0$ での電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ。

   (b) スイッチ S が開いた状態で定常状態にあるとき，$t=0$ でスイッチを閉じる場合を考える。$t\geq 0$ での電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ。

4. 図 4 に示す回路において $t=0$ において電流が流れていないとする。このとき以下の問いに答えよ。ただし，$R_1=12\ \Omega$，$R_2=6\ \Omega$，$L=2\ \mathrm{H}$，$u(t)$ はステップ関数とする．

   (a) 電源電圧が $v(t)=12\left(1-e^{-8t}\right)u(t)$ [V] で表されるとき，$t\geq 0$ においてインダクタに流れる電流 $i(t)$ を求めよ．

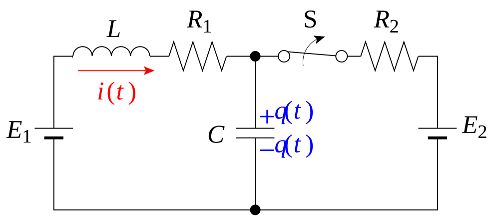

図 3

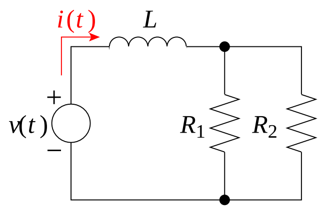

図 4

解答

1. (a) $q(0) = -CE = -0.01 \cdot 10 = -0.1$ C

   (b) 回路方程式は

   $$(R_1+R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \qquad \rightarrow \qquad (R_1+R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

   この微分方程式の定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ は

   $$\begin{aligned} q_s(t) &= CE = 0.1 \\ q_t(t) &= Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} = Ae^{-5t} \end{aligned}$$

   したがって，一般解は

   $$q(t) = 0.1 + Ae^{-5t}$$

   であり，$q(0) = -0.1$ より，$A = -0.2$ となり，求める $q(t)$，$i(t)$ は

   $$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{10}\left(1 - 2e^{-5t}\right) \text{ [C]} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{10}\left(10e^{-5t}\right) = e^{-5t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

   (c) 抵抗 R_2 で消費されるエネルギー W_2 は

   $$W_2 = \int_0^\infty R_2 i(t)^2 dt = \int_0^\infty 15e^{-10t}dt = \left[-\frac{15}{-10}e^{-4t}\right]_0^\infty = \frac{3}{2} \text{ J}$$

   ちなみに，R_1 で消費されるエネルギー W_1 は $W_1 = \frac{1}{2}$ J であり，電源から出るエネルギー W_E は

   $$W_E = \int_0^\infty Ei(t)dt = \int_0^\infty 10e^{-5t}dt = \left[-2e^{-5t}\right]_0^\infty = 2 \text{ J}$$

   である．コンデンサのエネルギーは最初と最後で同じであるので，$W_1 + W_2 = W_E$ でなければならず，確かにそうなっている．

2. (a) 交流理論より，電源の角周波数 $\omega = 5$ であることを考慮して，電流フェーザは

   $$I_- = \frac{V}{j\omega L} = \frac{5\sqrt{2}}{j5 \cdot 0.2} = -j5\sqrt{2}$$

   であるので，$t \le 0$ での電流 $i_-(t)$ は

   $$i_-(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}I_- e^{-5t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{-j10e^{-5t}\right\} = -10\cos 5t \text{ [A]}$$

   であり，$t = 0$ では

   $$i(0) = -10 \text{ A}$$

   (b) $t \ge 0$ での回路方程式は

   $$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) \qquad \rightarrow \qquad 0.2\frac{di(t)}{dt} + 3i(t) = 10\sin(5t)$$

   この式の過渡解 $i_t(t)$ は

   $$0.2\frac{di_t(t)}{dt} + 3i_t(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad i_t(t) = Ae^{-15t}$$

   であり，定常解 $i_s(t)$ は交流理論より，電流フェーザ I_s が

   $$I_s = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{5\sqrt{2}}{3+j} = \frac{3-j}{\sqrt{2}}$$

   であるので

   $$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}I_s e^{-5t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{(3-j)e^{-5t}\right\} = 3\sin(5t) - \cos(5t)$$

   したがって，一般解は

   $$i(t) = 3\sin(5t) - \cos(5t) + Ae^{-15t}$$

であり，$i(0)=-10$ であることから

$$i(0)=-1+A=-10 \qquad \rightarrow \qquad A=-9$$

よって，求める電流 $i(t)$ は

$$i(t)=3\sin(5t)-\cos(5t)-9e^{-15t}\ [\mathrm{A}]$$

3. (a) 初期条件

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E_1-E_2}{R_1+R_2}=1\ \mathrm{A} \\ q(0) &= C\cdot\{E-R_1 i(0)\}=\frac{3}{4}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

回路方程式

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$$

$i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として回路方程式をラプラス変換すると

$$L\{sI(s)-i(0)\}+R_1 I(s)+\frac{1}{sC}\{I(s)+q(0)\}=0$$

これに数値を代入すると

$$2\{sI(s)-1\}+12I(s)+\frac{16}{s}\left\{I(s)+\frac{3}{4}\right\}=\frac{24}{s}$$

これを $I(s)$ について解くと

$$I(s)=\frac{s+6}{(s^2+6s+8)}=\frac{s+6}{(s+2)(s+4)}$$

これをラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= (s+2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2}+(s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4}=\left.\frac{s+6}{s+4}e^{st}\right|_{s=-2}+\left.\frac{s+6}{s+2}e^{st}\right|_{s=-4} \\ &= 2e^{-2t}-e^{-4t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

(b) 初期条件は

$$\begin{aligned} i(0) &= 0\ \mathrm{A} \\ q(0) &= CE_1=\frac{1}{16}\cdot 24=\frac{3}{2}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

回路をラプラス変換して閉路方程式を立てると

$$\begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{s}+Li(0)-\dfrac{q(0)}{sC} \\ \dfrac{q(0)}{sC}-\dfrac{E_2}{s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} sL+R_1+\dfrac{1}{sC} & -\dfrac{1}{sC} \\ -\dfrac{1}{sC} & R_2+\dfrac{1}{sC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

これに数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{20}{s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{2(s^2+6s+8)}{s} & -\dfrac{16}{s} \\ -\dfrac{16}{s} & \dfrac{8(s+2)}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

これを Cramer の公式を用いて解く。行列式 Δ は

$$\Delta=\frac{2(s^2+6s+8)}{s}\cdot\frac{8(s+2)}{s}-\left(-\frac{16}{s}\right)^2=\frac{16(s^3+8s^2+20s)}{s^2}=\frac{16(s^2+8s+20)}{s}$$

$I_1(s)$ は

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{16}{s} \\ \dfrac{20}{s} & \dfrac{8(s+2)}{s} \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{20\cdot 16}{s^2}\cdot\frac{s}{16(s^2+8s+20)}=\frac{20}{s(s^2+8s+20)} \\ &= \frac{(s^2+8s+20)-s(s+8)}{s(s^2+8s+20)}=\frac{1}{s}-\frac{(s+4)+2\cdot 2}{(s+4)^2+2^2} \end{aligned}$$

これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = i_1(t) = 1 - \{\cos(2t) + 2\sin(2t)\}\, e^{-4t} \text{ [A]}$$

4. 初期条件は

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i(t) = v(t)$$

数値を代入すると

$$2\frac{di(t)}{dt} + 4i(t) = 12\left(1 - e^{-8t}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = 6\left(1 - e^{-8t}\right)$$

この式をラプラス変換すると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 2I(s) = 6\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+8}\right) \quad \rightarrow \quad (s+2)I(s) = 6\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+8}\right)$$

これを $I(s)$ について解くと

$$I(s) = 6\left\{\frac{1}{s(s+2)} - \frac{1}{(s+2)(s+8)}\right\}$$

これをラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= sI(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+8)I(s)e^{st}\Big|_{s=-8} \\ &= \frac{6}{s+2}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \left(\frac{6}{s} - \frac{6}{s+8}\right)e^{st}\Bigg|_{s=-2} - \frac{6}{s+2}e^{st}\Bigg|_{s=-8} \\ &= 3 - 4e^{-2t} + e^{-8t} \text{ [A]} \end{aligned}$$