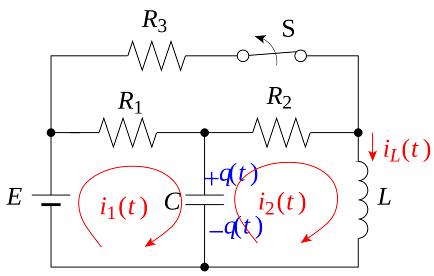
H22 年度電気回路 I 宿題 (第 14 回)

課題

図に示す回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を開く，このスイッチを開いた時刻を $t=0$ とする．ここで，抵抗 R_1，R_2 に流れる電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めることを考える．以下の設問に答えなさい．ただし，$R_1=5\ \Omega$，$R_2=7\ \Omega$，$R_3=24\ \Omega$，$L=1$ H，$C=\frac{1}{5}$ F，$E=24$ V とする．



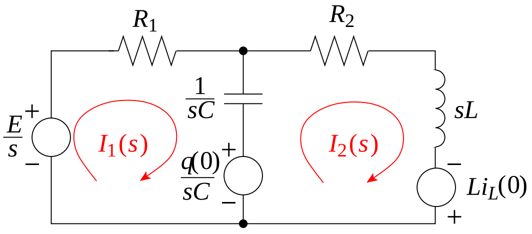
図

解答

(a) 時刻 $t=0$ において $i_L(0)$，$q(0)$ はそれぞれ以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{E}{R_1+R_2}+\frac{E}{R_3}=\frac{24}{12}+\frac{24}{24}=3\ \mathrm{A} \\
q(0) &= C\cdot\frac{R_2E}{R_1+R_2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{7\cdot 24}{12}=\frac{14}{5}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

(b) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I_1(s)$，$I_2(s)$ とすると，問題図の回路の s 領域の回路は以下のように書ける



図

(c) 閉路方程式は以下のように書ける．

$$
\begin{bmatrix} R_1+\dfrac{1}{sC} & -\dfrac{1}{sC} \\ -\dfrac{1}{sC} & sL+R_2+\dfrac{1}{sC} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{E}{s}-\dfrac{q(0)}{sC} \\ Li_L(0)+\dfrac{q(0)}{sC} \end{bmatrix}
$$

これに与えられている数値を代入し，(a) で求めた初期条件を考慮すると，以下のように書ける．

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{5(s+1)}{s} & -\dfrac{5}{s} \\ -\dfrac{5}{s} & \dfrac{s^2+7s+5}{s} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{10}{s} \\ \dfrac{3s+14}{s} \end{bmatrix}
$$

(d) (c) で導出した連立 1 次方程式を解くため Cramer の公式を用いる．まず行列式 Δ は

$$
\Delta = \frac{5(s+1)(s^2+7s+5)}{s^2}-\frac{25}{s^2}=\frac{5(s^3+8s^2+12s)}{s^2}=\frac{5(s+2)(s+6)}{s}
$$

$I1(s)$，$I_2(s)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{10}{s} & -\dfrac{5}{s} \\ \dfrac{3s+14}{s} & \dfrac{s^2+7s+5}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\dfrac{10(s^2+7s+5)}{s^2}+\dfrac{5(3s+14)}{s^2}}{\dfrac{5(s+2)(s+6)}{s}} \\
&= \frac{2(s^2+7s+5)+(3s+14)}{s(s+2)(s+6)} = \frac{2s^2+17s+24}{s(s+2)(s+6)} \\
I_2(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{5(s+1)}{s} & \dfrac{10}{s} \\ -\dfrac{5}{s} & \dfrac{3s+14}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\dfrac{5(s+1)(3s+14)}{s^2}+\dfrac{50}{s^2}}{\dfrac{5(s+2)(s+6)}{s}} \\
&= \frac{(3s^2+17s+14)+10}{s(s+2)(s+6)} = \frac{3s^2+17s+24}{s(s+2)(s+6)}
\end{aligned}
$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_1(s)\} = sI_1(s)e^{st}\big|_{s=0} + (s+2)I_1(s)e^{st}\big|_{s=-2} + (s+6)I_1(s)e^{st}\big|_{s=-6} \\
&= \left.\frac{2s^2+17s+24}{(s+2)(s+6)}e^{st}\right|_{s=0} + \left.\frac{2s^2+17s+24}{s(s+6)}e^{st}\right|_{s=-2} + \left.\frac{2s^2+17s+24}{s(s+2)}e^{st}\right|_{s=-6} \\
&= 2+\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-6t}\ \text{[A]} \\
i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_2(s)\} = sI_2(s)e^{st}\big|_{s=0} + (s+2)I_2(s)e^{st}\big|_{s=-2} + (s+6)I_2(s)e^{st}\big|_{s=-6} \\
&= \left.\frac{3s^2+17s+24}{(s+2)(s+6)}e^{st}\right|_{s=0} + \left.\frac{3s^2+17s+24}{s(s+6)}e^{st}\right|_{s=-2} + \left.\frac{3s^2+17s+24}{s(s+2)}e^{st}\right|_{s=-6} \\
&= 2-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{-6t}\ \text{[A]}
\end{aligned}
$$

ちなみに，コンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ は以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0)+\int_0^t \{i_1(t)-i_2(t)\}\,dt = \frac{14}{5}+\int_0^t\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-6t}\right)dt \\
&= \frac{14}{5}+\left[-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-6t}\right] = \frac{14}{5}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-6t}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \\
&= \frac{14}{5}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-6t}\ \text{[C]}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= i_2(0) = 2-\frac{1}{4}+\frac{5}{4} = 3\ \text{A} \\
q(0) &= \frac{14}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0\ \text{C}
\end{aligned}
$$

であり初期条件に矛盾しない．また

$$
\begin{aligned}
&R_1 i_1(t)+\frac{q(t)}{C} = 10+\frac{5}{4}e^{-2t}-\frac{5}{4}e^{-6t}+14-\frac{5}{4}e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{-6t} = 24 = E \\
&R_1 i_1(t)+R_2 i_2(t)+L\frac{di_2(t)}{dt} = 10+\frac{5}{4}e^{-2t}-\frac{5}{4}e^{-6t}14-\frac{7}{4}e^{-2t}+\frac{35}{4}e^{-6t}+\frac{2}{4}e^{-2t}-\frac{30}{4}e^{-6t} \\
&\qquad = 24 = E
\end{aligned}
$$

であり，キルヒホッフの電圧則にも矛盾していないことが確認できる．