H22 年度電気回路 I 宿題 (第 13 回)

課題

以下の問題をラプラス変換を利用して解く

1. 第 8 回宿題の (b)
2. 第 9 回宿題の (a)
3. 第 11 回宿題の (b)
4. 第 12 回宿題の (c)

解答

1. $t \geq 0$ の回路方程式は

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E_1 \qquad \rightarrow \qquad 8i(t) + 40\int i(t)dt = 16$$

であり，初期条件は $q(0) = -\frac{1}{4}$ C である．
まず， $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として回路方程式を初期条件を考慮してラプラス変換すると

$$8I(s) + \frac{40}{s}\left\{I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{16}{s} \qquad \rightarrow \qquad 8I(s) + \frac{40}{s}\left\{I(s) - \frac{1}{4}\right\} = \frac{16}{s}$$

であり，これを $I(s)$ について解くと

$$I(s) + \frac{5}{s}\left\{I(s) - \frac{1}{4}\right\} = \frac{2}{s}$$
$$\left(1 + \frac{5}{s}\right)I(s) = \frac{13}{4s}$$
$$I(s) = \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{s+5}$$

と求まる．$I(s)$ をラプラス逆変換して $i(t)$ を求めると，ラプラス変換表より

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{13}{4}e^{-5t} \text{ [A]}$$

と求まる．また，コンデンサの電荷 $q(t)$ は

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) + \int_0^t i(t)dt = -\frac{1}{4} + \left[-\frac{13}{20}e^{-5t}\right]_0^t = -\frac{5}{20} - \frac{13}{20}e^{-5t} + \frac{13}{20} \\ &= \frac{1}{20}\left(8 - 13e^{-5t}\right) \text{ [C]} \end{aligned}$$

2. $t \geq 0$ の回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = v(t) \qquad \rightarrow \qquad 2\frac{di(t)}{dt} + 20i(t) = 100\sin(5t)$$

であり，初期条件は $i(0) = -1$ A である．
まず， $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として回路方程式を初期条件を考慮してラプラス変換すると

$$2\{sI(s) - i(0)\} + 20I(s) = 100\cdot\frac{5}{s^2+25} \qquad \rightarrow \qquad 2\{sI(s) + 1\} + 20I(s) = 100\cdot\frac{5}{s^2+25}$$

であり，これを $I(s)$ について解くと

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \frac{250}{(s+10)(s^2+25)} - \frac{1}{s+10} = \frac{K_1}{s+10} + \frac{K_2 s + 5K_3}{s^2+25} - \frac{1}{s+10} \\
&= \frac{(K_1+K_2)s^2 + (10K_2+5K_3)s + (25K_1+50K_3)}{(s+10)(s^2+25)} - \frac{1}{s+10}
\end{aligned}
$$

であり，係数比較より

$$
\begin{cases}
K_1 + K_2 = 0 \\
10K_2 + 5K_3 = 0 \\
25K_1 + 50K_3 = 250
\end{cases}
\quad \rightarrow \quad K_1 = 2,\quad K_2 = -2,\quad K_3 = 4
$$

したがって，$I(s)$ のラプラス逆変換は，ラプラス変換表より

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = 2e^{-10t} - 2\cos(5t) + 4\sin(5t) - e^{-t} \\
&= 4\sin(5t) - 2\cos(5t) + e^{-10t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

と求まる．

3. $t \geq 0$ の回路方程式は

$$
L\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_2)i(t)\frac{1}{C}\int i(t)dt = E_1 \quad \rightarrow \quad 5\frac{di(t)}{dt} + 20i(t) + 20\int i(t)dt = 100
$$

であり，初期条件は $q(0) = 4$ C，$i(0) = 4$ A である．

まず， $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として回路方程式を初期条件を考慮してラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&5\{sI(s) - i(0)\} + 20I(s) + \frac{20}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{100}{s} \\
&\quad \rightarrow \quad 5\{sI(s) - 4\} + 20I(s) + \frac{20}{s}\{I(s) + 4\} = \frac{100}{s}
\end{aligned}
$$

であり，これを $I(s)$ について解くと

$$
\begin{aligned}
&(s^2+4s+4)I(s) = 20 + 4s - 16 \\
&I(s) = \frac{4(s+1)}{(s+2)^2} = \frac{4(s+2)-4}{(s+2)^2} = \frac{4}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2}
\end{aligned}
$$

であるので，ラプラス変換表と推移定理を利用すると

$$
i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = 4e^{-2t} - 4te^{-2t} = 4(1-t)e^{-2t}\ [\mathrm{A}]
$$

と求まる．また，電荷 $q(t)$ は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0) + \int_0^t i(t)dt = 4 + 4\int_0^T (1-t)e^{-2t}dt = 4 + 4\left[-\frac{1-t}{2}e^{-2t}\right]_0^t - 4\int_0^t \frac{1}{2}e^{-2t}dt \\
&= 4 - 2(1-t)e^{-2t} + 2 + 4\left[\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^t \\
&= 6 - 2(1-t)e^{-2t} + e^{-2t} - 1 \\
&= 5 + (2t-1)e^{-2t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}
$$

と求まる．

4. $t \geq 0$ の回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t)\frac{1}{C}\int i(t)dt = E_1 \qquad \rightarrow \qquad 5\frac{di(t)}{dt} + 10i(t) + 20\int i(t)dt = 100$$

であり，初期条件は $q(0) = 4$ C，$i(0) = 4$ A である．

まず， $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として回路方程式を初期条件を考慮してラプラス変換すると

$$\begin{aligned} &5\{sI(s) - i(0)\} + 10I(s) + \frac{20}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{100}{s} \\ &\quad \rightarrow \quad 5\{sI(s) - 4\} + 10I(s) + \frac{20}{s}\{I(s) + 4\} = \frac{100}{s} \end{aligned}$$

であり，これを $I(s)$ について解くと

$$\begin{aligned} &(s^2 + 2s + 4)I(s) = 20 + 4s - 16 \\ &I(s) = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2 + 3} \end{aligned}$$

であるので，ラプラス変換表と推移定理を利用すると

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = 4e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) \ [\mathrm{A}]$$

と求まる．また，電荷 $q(t)$ は

$$q(t) \quad = \quad q(0) + \int_0^t i(t)dt = 4 + 4\int_0^t e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)dt$$

と表せる．ここで，右辺第 2 項の積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)dt \\ &= \left[-e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)\right]_0^t - \int_0^t \sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)dt \\ &= -e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + 1 + \left[\sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\right]_0^t - \int_0^t 3e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)dt \\ 4I &= -e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + 1 + \sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} q(t) &= 4 - e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + 1 + \sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t) \\ &= 5 + e^{-t}\left\{\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - \cos(\sqrt{3}t)\right\} \ [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

と求まる．