H22 年度電気回路 I 宿題 (第 12 回)

課題

1. 以下の関数をラプラス変換の定義

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

に従ってラプラス変換せよ．ただし，$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ とし，$a > 0$ とする．

$$L\frac{di(t)}{dt}, \qquad \frac{1}{C}\int i(t)dt, \qquad Ri(t), \qquad Eu(t-a), \qquad V_m \sin(\omega t + \theta), \qquad e^{-at}$$

2. 推移定理 (周波数領域)

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = F(s+b)$$

を証明せよ．

3. 以下の関数をラプラス逆変換せよ．

$$\frac{1}{s+3}, \qquad \frac{2}{s+4}, \qquad \frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}, \qquad \frac{3s+8}{s^2+4^2}, \qquad \frac{3s+17}{(s^2+6s+25)}$$

解答

1. (a) 部分積分を利用して解く

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{L\frac{di(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty L\frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[Li(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty Li(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= L\{0 - i(0)\} + sL\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = -Li(0) + sLI(s) \\
&= L\{sI(s) - i(0)\}
\end{aligned}$$

(b) $i(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$ と置いて，$L = 1$ とした (a) の結果を利用する．

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + f(0)\right)$$

ここで，$f(t) = \displaystyle\int i(t)dt$ であるので

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int i(t)dt\right\} = \frac{1}{C}F(s) = \frac{1}{sC}\left(I(s) + \int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right)$$

(c)

$$\mathcal{L}\{Ri(t)\} = \int_0^\infty Ri(t)e^{-st}dt = R\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = RI(s)$$

(d) $u(t-a)$ は $t \geq a$ で値が 1，$t < a$ で値が 0 であるので

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{V_m \sin(\omega t+\theta)\} &= \int_0^\infty V_m \sin(\omega t+\theta)\cdot e^{-st}dt = V_m \int_0^\infty \frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-j(\omega t+\theta)}}{j2}\cdot e^{-st}dt \\
&= V_m \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}e^{j\theta}-e^{-(s+j\omega)t}e^{-j\theta}}{j2}dt = \frac{V_m}{j2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}e^{j\theta}}{-(s-j\omega)}-\frac{e^{-(s+j\omega)t}e^{-j\theta}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{V_m}{j2}\left[\frac{e^{j\theta}}{s-j\omega}-\frac{e^{-j\theta}}{s+j\omega}\right] = \frac{V_m}{j2}\cdot\frac{s(e^{j\theta}-e^{j\theta})+j\omega(e^{j\theta}+e^{j\theta})}{s^2+\omega^2} \\
&= V_m \frac{s\cdot\sin\theta+\omega\cdot\cos\theta}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(f)

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

2. 推移定理は以下のように導ける

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-bt}f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+b)t}dt$$

$s+b=s'$ と置き，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-s't}dt = F(s') = F(s+b)$$

3. (a) ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

(b) ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+4}\right\} = 2e^{-4t}$$

(c) まず以下のように部分分数展開する

$$\frac{3s+10}{(s+3)(s+4)} = \frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2}{s+4} = \frac{(K_1+K_2)s+(4K_1+3K_2)}{(s+3)(s+4)}$$

ここで，K_1，K_2 は係数比較により

$$\begin{aligned}
s &: \quad K_1+K_2=3 \\
1 &: \quad 4K_1+3K_2=10
\end{aligned}$$

であるので，$K_1=1$，$K_2=2$ と求まる．以上より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+10}{(s+3)(s+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}+\frac{2_2}{s+4}\right\} = e^{-3t}+2e^{-4t}$$

(d) ラプラス変換表より

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+8}{s^2+4^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4^2}+\frac{2\cdot 4}{s^2+4^2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\} \\
&= 3\cos(4t)+2\sin(4t)
\end{aligned}$$

(e) ラプラス変換表と推移定理を利用して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+17}{s^2+6s+25}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+3)+8}{(s+3)^2+4^2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+4^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^2+4^2}\right\} \\
&= \left\{3\cos(4t)+2\sin(4t)\right\}e^{-3t}
\end{aligned}$$