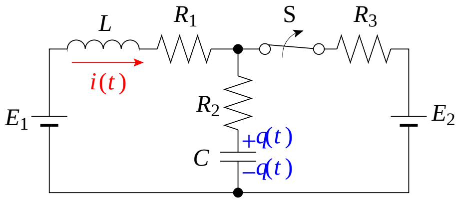
平成 22 年度電気回路 I 第 11 回 宿題

宿題

図の回路が定常状態にあり，$t = 0$ でスイッチ S が開くものとする．コンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ とインダクタに流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_3 = 10\ \Omega$，$L = 5$ H，$C = 0.05$ F，$E_1 = 100$ V，$E_2 = 40$ V として，R_2 の値が

(a) $R_2 = 20\ \Omega$，　(b) $R_2 = 15\ \Omega$，　(c) $R_2 = 5\ \Omega$

の 3 通りの場合についてそれぞれ求めよ．



解答

まず，$t \leq 0$ での状態を考える．図の回路において $t \leq 0$ での定常状態では，コンデンサに電流は流れないので，$t = 0$ でインダクタに流れる電流は

$$i(0) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_3} = \frac{100 - 40}{5 + 10} = 4 \text{ A} \tag{1}$$

であり，このときコンデンサにかかる電圧 $v_C(0)$ は，インダクタ L と抵抗 R_2 での電圧降下はないので

$$v_C(0) = E_1 - R_1 i(0) = 100 - 5 \cdot 4 = 80 \text{ V} \tag{2}$$

である．したがって，コンデンサに蓄えられている電荷は

$$q(0) = C v_C(0) = 80 \cdot 0.05 = 4 \text{ C} \tag{3}$$

である．

次に，$t \geq 0$ においての状態を考える．このときキルヒホッフの電圧則より以下の回路方程式を得る．

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E_1 \tag{4}$$

ここで，コンデンサの電荷と電流の間には，$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ の関係があるので，上式は以下のように電荷 $q(t)$ のみの方程式にできる．

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_1 \tag{5}$$

この微分方程式の定常解 $q_s(t)$ は，電源が直流電源であるので定常状態では時間変化がなくなることを考慮し，$d/dt \to 0$ と置くと

$$\frac{q_s(t)}{C} = E_1 \qquad \to \qquad q_s(t) = CE_1 = 0.05 \cdot 100 = 5 \text{ C} \tag{6}$$

と求まる．一方，過渡解 $q_t(t)$ は右辺を 0 として

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{7}$$

を解くことにより求まる．この 2 階の微分方程式の解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，m は以下の特性方程式を解くことで求まる．

$$Lm^2 + (R_1 + R_2)m + \frac{1}{C} = 0 \tag{8}$$

以下に R_2 のそれぞれの場合に対して，具体的な解を求める．

(a) $R_2 = 20\ \Omega$ のとき

特性方程式の解は

$$5m^2 + 25m + 20 = 5(m^2 + 5m + 4) = 5(m+1)(m+4) = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = -1, -4 \tag{9}$$

であり，過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} \tag{10}$$

と書け，$q(t)$，$i(t)$ の一般解は

$$q(t) = 5 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} \tag{11}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \tag{12}$$

と書ける．ここで，A_1，A_2 は積分定数であり，この値を決めるために $t = 0$ での初期条件を用いると

$$\begin{cases} q(0) = 5 + A_1 + A_2 = 4 \\ i(0) = -A_1 - 4A_2 = 4 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = 0,\ A_2 = -1 \tag{13}$$

であるので，$q(t)$，$i(t)$ は

$$q(t) = 5 - e^{-4t}\ [\mathrm{C}] \tag{14}$$

$$i(t) = 4e^{-4t}\ [\mathrm{A}] \tag{15}$$

と求まる．

(b) $R_2 = 15\ \Omega$ のとき

特性方程式の解は

$$5m^2 + 20m + 20 = 5(m^2 + 4m + 4) = 5(m+2)^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = -2\ (\text{重解}) \tag{16}$$

であり，過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t} \tag{17}$$

と書け，$q(t)$，$i(t)$ の一般解は

$$q(t) = 5 + A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t} \tag{18}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -2A_1 e^{-t} + A_2 \left(1 - 2t\right) e^{-2t} \tag{19}$$

と書ける．ここで，A_1，A_2 は積分定数であり，この値を決めるために $t = 0$ での初期条件を用いると

$$\begin{cases} q(0) = 5 + A_1 = 4 \\ i(0) = -2A_1 + A_2 = 4 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = -1,\ A_2 = 2 \tag{20}$$

であるので，$q(t)$，$i(t)$ は

$$q(t) = 5 + (2t - 1)e^{-2t}\ [\mathrm{C}] \tag{21}$$

$$i(t) = 4(1 - t)e^{-2t}\ [\mathrm{A}] \tag{22}$$

と求まる．

(c) $R_2 = 5\ \Omega$ のとき

特性方程式の解は

$$5m^2 + 10m + 20 = 5(m^2 + 2m + 4) = 5\left\{(m+1)^2 + 3\right\} = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = -1 \pm \sqrt{3} \tag{23}$$

であり，過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) = \left\{A_1 \cos(\sqrt{3}t) + A_2 \sin(\sqrt{3}t)\right\} e^{-t} \tag{24}$$

と書け，$q(t)$，$i(t)$ の一般解は

$$q(t) = 5 + \left\{A_1 \cos(\sqrt{3}t) + A_2 \sin(\sqrt{3}t)\right\} e^{-t} \tag{25}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \left\{(-A_1 + \sqrt{3}A_2)\cos(\sqrt{3}t) + (-A_2 - \sqrt{3}A_1)\sin(\sqrt{3}t)\right\} e^{-t} \tag{26}$$

と書ける．ここで，A_1，A_2 は積分定数であり，この値を決めるために $t = 0$ での初期条件を用いると

$$\left\{\begin{array}{c} q(0) = 5 + A_1 = 4 \\ i(0) = -A_1 + \sqrt{3}A_2 = 4 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad A_1 = -1,\ A_2 = \sqrt{3} \tag{27}$$

であるので，$q(t)$，$i(t)$ は

$$q(t) = 5 + \left\{\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - \cos(\sqrt{3}t)\right\} e^{-t}\ [\mathrm{C}] \tag{28}$$

$$i(t) = 4\cos(\sqrt{3}t)e^{-t}\ [\mathrm{A}] \tag{29}$$

と求まる．