平成 22 年度電気回路 I 第 9 回 宿題

宿題

$R_0 = 10\ \Omega$，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 15\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = 10$ mF，$E_0 = 25$ V，$v(t) = 100\sin(5t)$ [V] として以下の問いに答えよ．

1. 図 1 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるとき，コイル L に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

2. 図 2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるときコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(t)$ および流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

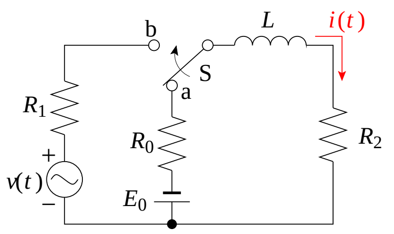

図 1

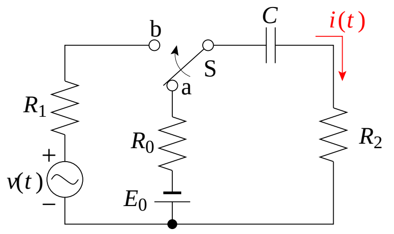

図 2

解答

1. $t < 0$ における定常状態においてコイルに流れる電流 I_0 は電流の向きに注意すると

$$I_0 = -\frac{E_0}{R_0 + R_2} = -\frac{25}{10 + 15} = -1 \text{ A}$$

である．一方，$t \geq 0$ における回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = 100\sin(5t)$$

であるので，その 過渡解 $i_t(t)$ は

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = A\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right) = Ae^{-10t} \qquad (A : \text{積分定数})$$

である．次に，定常解を求めるために，交流理論を用いる．電源の角周波数は $\omega = 5$ rad/s であり，電圧フェーザは $V = 50\sqrt{2}$ と表されるので，定常状態における電流フェーザ I_s は

$$I_s = \frac{V}{(R_1 + R_2) + j\omega L} = \frac{50\sqrt{2}}{20 + j10} = \frac{5\sqrt{2}}{2 + j} = \sqrt{2}(2 - j)$$

であり，その実時間表現 $i_s(t)$ は

$$\begin{aligned} i_s(t) &= \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2}I_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{2(2 - j)(\cos(5t) + j\sin(5t))\right\} \\ &= 4\sin(5t) - 2\cos(5t) \end{aligned}$$

である．したがってであり，一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = 4\sin(5t) - 2\cos(5t) + Ae^{-10t}$$

と書ける．ここで，初期条件として $i(0) = I_0 = -1$ を考慮すると

$$i(0) = -2 + A = -1 \quad \rightarrow \quad A = 1$$

と A が求まるので，$t \geq 0$ における電流の時間変化 $i(t)$ は

$$i(t) = 4\sin(5t) - 2\cos(5t) + e^{-10t} \text{ [A]}$$

と求まる．

2. $t < 0$ における定常状態においてコンデンサに蓄えられている電荷 Q_0 は電圧の向きに注意して

$$Q_0 = -CE_0 = -\frac{1}{100} \cdot 25 = -\frac{1}{4} = -0.25 \text{ C}$$

である．一方，$t \geq 0$ における回路方程式は

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = 100 \sin(5t)$$

であり，電流の向きに注意して $i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 100 \sin(5t)$$

であるので，その過渡解 $q_t(t)$ は

$$(R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = A \exp\left(-\frac{t}{C(R_1 + R_2)}\right) = Ae^{-5t} \qquad (A : \text{積分定数})$$

である．一方，定常解を求めるために交流理論を用いると定常状態における電流 I_s は

$$I_s = \frac{50\sqrt{2}}{(R_1 + R_2) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{50\sqrt{2}}{20 - j20} = \frac{5\sqrt{2}}{2(1 - j)} = \frac{5\sqrt{2}}{4}(1 + j)$$

であり，その実時間表現 $i_s(t)$ は

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{2} I_s \exp(j\omega t)\right\} = \frac{5}{2}\left(\sin(5t) + \cos(5t)\right)$$

であり，電荷に対する定常解 $q_s(t)$ は

$$q_s(t) = \int i_s(t) dt = \frac{1}{2}\left(-\cos(5t) + \sin(5t)\right)$$

である．したがって， 一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{1}{2}\left(-\cos(5t) + \sin(5t)\right) + Ae^{-5t} \text{ [C]}$$

と書ける．ここで，初期条件として $q(0) = Q_0 = -0.25$ を考慮すると

$$q(0) = -\frac{1}{2} + A = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

と A が求まるので，$t \geq 0$ における電荷の時間変化 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(-\cos(5t) + \sin(5t)\right) + \frac{1}{4}e^{-5t} \text{ [C]}$$

と求まる．いまの場合，電流は電荷の微分で表現されるので $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{5}{2}\left\{\sin(5t) + \cos(5t)\right\} - \frac{5}{4}e^{-5t} \text{ [A]}$$

と求まる．