平成 22 年度電気回路 I 第 7 回 宿題

宿題

$R_0 = 4\ \Omega$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $E_0 = 10$ V, $E_1 = 16$ V, $L = 2$ H, $C = 25$ mF として以下の問いに答えよ．

1. 図 1 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるとき，コイル L に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

2. 図 2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるとき，コンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(t)$ および流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

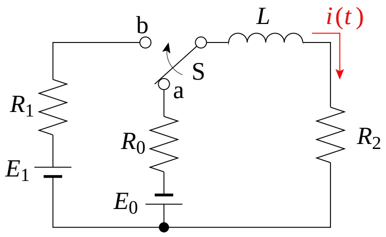


図 1

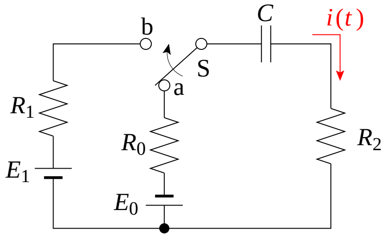


図 2

解答

1. $t < 0$ における定常状態においてコイルに流れる電流 I_0 は電流の向きに注意すると

$$I_0 = -\frac{E_0}{R_0 + R_2} = -\frac{10}{10} = -1 \text{ A}$$

である．一方，$t \geq 0$ における回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = E_1$$

であるので，その定常解 $i_s(t)$，過渡解 $i_t(t)$ は

$$L\frac{di_s(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_s(t) = E_1 \quad \rightarrow \quad i_s(t) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{16}{8} = 2$$

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = A\exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right) = Ae^{-4t} \qquad (A : \text{積分定数})$$

であり，一般解は

$$i(t) = 2 + Ae^{-4t} \text{ [A]}$$

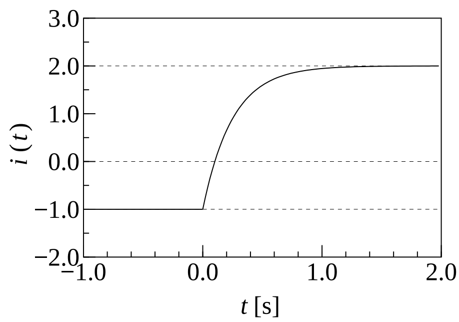
と書ける．ここで，初期条件として $i(0) = I_0 = -1$ を考慮すると

$$i(0) = 2 + A = -1 \quad \rightarrow \quad A = -3$$

と A が求まるので，$t \geq 0$ における電流の時間変化 $i(t)$ は

$$i(t) = 2 - 3e^{-4t} \text{ [A]}$$

と求まる．



2. $t < 0$ における定常状態においてコンデンサに蓄えられている電荷 Q_0 は電圧の向きに注意して

$$Q_0 = -CE_0 = -\frac{1}{40} \cdot 10 = -\frac{1}{4} = -0.25 \text{ C}$$

である．一方，$t \geq 0$ における回路方程式は

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

であり，電流の向きに注意して $i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

であるので，その定常解 $q_s(t)$，過渡解 $q_t(t)$ は

$$(R_1 + R_2)\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E_1 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE_1 = \frac{16}{40} = 0.4 \text{ C}$$
$$(R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = A\exp\left(-\frac{t}{C(R_1 + R_2)}\right) = Ae^{-5t} \qquad (A\text{：積分定数})$$

であり，一般解は

$$q(t) = 0.4 + Ae^{-5t} \text{ [C]}$$

と書ける．ここで，初期条件として $q(0) = Q_0 = -0.25$ を考慮すると

$$q(0) = 0.4 + A = -0.25 \quad \rightarrow \quad A = 0.65$$

と A が求まるので，$t \geq 0$ における電荷の時間変化 $q(t)$ は

$$q(t) = 0.4 - 0.65e^{-5t} \text{ [C]}$$

と求まる．いまの場合，電流は電荷の微分で表現されるので $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 3.25e^{-5t} \text{ [A]}$$

と求まる．この結果を下図に示す．電荷は $t = 0$ で連続的に変化するが，電流は $t = 0$ で不連続に変化することがわかる．