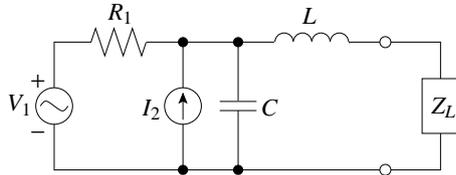


平成 22 年度電気回路 I 第 7 回 宿題

宿題

下図の回路において以下の問に答えよ。ただし $R_1 = 20 \Omega$, $L = \frac{1}{5\pi} \text{ H}$, $C = \frac{1}{2\pi} \text{ mF}$, $V_1 = 20 \text{ V}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$ とする。

1. 負荷での消費電力を最大にする負荷 Z_L とその回路, およびそのときの消費電力を求めよ。
2. 負荷が抵抗 R のとき, 消費電力を最大にする R とそのときの消費電力を求めよ。



解答

まず電源回路のテブナン等価回路を求める。

- 内部インピーダンス

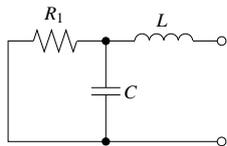
$$Z_0 = j\omega L + \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = j20 + \frac{20 \cdot (-j20)}{20 - j20} = j20 + \frac{-j20}{1 - j} = j20 - j10(1 + j) = 10(1 + j) \Omega$$

- V_1 が作る開放電圧

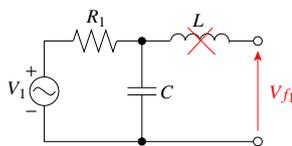
$$V_{f1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} V_1 = \frac{-j20}{20 - j20} \cdot 20 = \frac{-j20}{1 - j} = -j10(1 + j) = 10(1 - j) \text{ V}$$

- I_2 が作る開放電圧

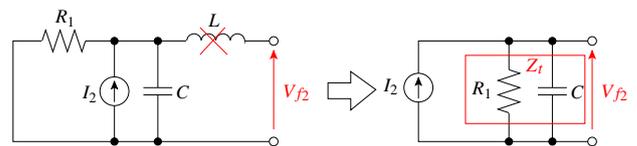
$$V_{f2} = I_2 \cdot Z_t = I_2 \cdot \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = 1 \cdot \frac{20 \cdot (-j20)}{20 - j20} = \frac{-j20}{1 - j} = -j10(1 + j) = 10(1 - j) \text{ V}$$



Z_0 を求める回路

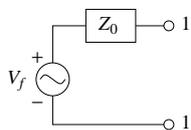


V_{f1} を求める回路



V_{f2} を求める回路

したがって, 電源回路のテブナン等価回路は以下ようになる



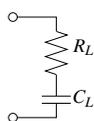
$$Z_0 = R_0 + jX_0 = 10(1 + j) \Omega$$

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = 20(1 - j) \text{ V}$$

1. 最大電力伝送定理より, 負荷インピーダンス Z_L を電源の内部インピーダンスの複素共役を選べば良いので

$$Z_L = Z_0^* = 10(1 - j) \Omega$$

であり, これを実現する負荷の一例は 抵抗とコンデンサの直列接続であり以下ようになる。



$$R_L + \frac{1}{j\omega C_L} = 10 - j10 \quad \rightarrow \quad R_L = 10$$

$$\frac{1}{j\omega C_L} = -j10 \quad \rightarrow \quad C_L = \frac{1}{1000\pi} = \frac{1}{\pi} \text{ mF}$$

また、このときの消費電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{400|1+j|^2}{4 \cdot 10} = \frac{800}{40} = 20 \text{ W}$$

2. 負荷が抵抗のみの場合負荷での消費電力は

$$P = \frac{R|V_f|^2}{(R+R_0)^2 + X_0^2}$$

と表されるが、これを最大にするということは $P > 0$ より $1/P$ を最小にするということと同じであるので

$$\frac{1}{P} = \frac{(R+R_0)^2 + X_0^2}{R|V_f|^2} = \frac{1}{|V_f|^2} \left(R + 2R_0 + \frac{R_0^2 + X_0^2}{R} \right)$$

を R で微分して、 $1/P$ を最小にする R は

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{P} \right) = \frac{1}{|V_f|^2} \left(1 - \frac{R_0^2 + X_0^2}{R^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ } \Omega$$

と求まる。このときの消費電力は

$$\begin{aligned} P &= \frac{R|V_f|^2}{(R+R_0)^2 + X_0^2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 800}{(10+10\sqrt{2})^2 + 10^2} = \frac{8000\sqrt{2}}{400 + 200\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} \\ &= \frac{80(\sqrt{2} - 1)}{2} = 40(\sqrt{2} - 1) \simeq 16.6 \text{ W} \end{aligned}$$