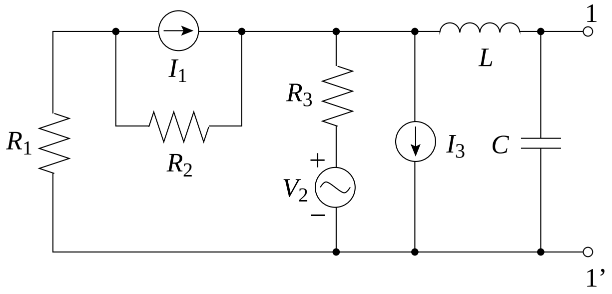
平成22年度電気回路I 第6回 宿題

宿題

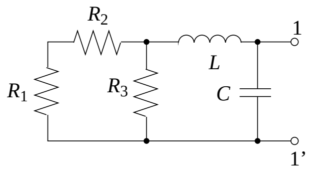
下図の回路のテブナン等価回路，ノルトン等価回路を求めよ．ただし，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 30\ \Omega$，$R_3 = 40\ \Omega$，$L = \frac{1}{5\pi}$ H，　$C = \frac{1}{\pi}$ mF，$I_1 = 4$ A，$V_2 = 80$ V，$I_3 = 1$ A，$f = 50$ Hz とする。



解答

1. **ノルトン等価回路を求める**

   - 内部インピーダンスの計算



左から順にインピーダンスを合成していくと内部インピーダンス Z_0 は以下のように求まる．

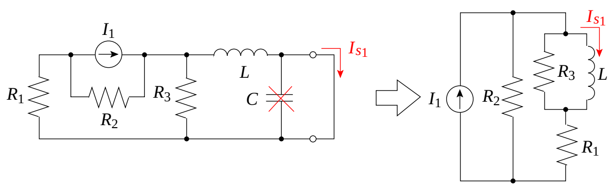
$$R_1 + R_2 = 10 + 30 = 40\ \Omega$$
$$(R_1 + R_2)//R_3 = 40//40 = \frac{40 * 40}{40 + 40} = 20\ \Omega$$
$$\{(R_1 + R_2)//R_3\} + j\omega L = 20 + j20\ \Omega$$
$$\begin{aligned} Z_0 &= [\{(R_1 + R_2)//R_3\} + j\omega L] // \{1/(j\omega)C\} = \frac{(20 + j20) \cdot (-j10)}{(20 + j20) - j10} \\ &= \frac{-j20(1 + j)}{2 + j} = \frac{-j20(1 + j)(2 - j)}{5} = -j4(3 + j) = 4(1 - j3)\ \Omega \end{aligned}$$

したがって内部アドミタンス Y_0 は

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{4(1 - j3)} = \frac{1 + j3}{40}\ \mathrm{S}$$

と求まる．

   - 電流源 I_1 のみのときの短絡電流 I_{s1}



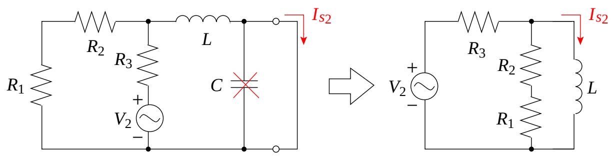
R_3，L，R_1 の合成インピーダンス Z_{1a} は

$$Z_{1a} = R_1 + \frac{R_3 \cdot j\omega L}{R_3 + j\omega L} = 10 + \frac{j800}{40 + j20} = 10 + \frac{j40}{2 + j} = \frac{10(2 + j5)}{2 + j}$$

であるので，求める電流 I_{1s} は分流の法則を利用して

$$
\begin{aligned}
I_{s1} &= \frac{1/Z_{1a}}{1/R_2+1/Z_{1a}}\cdot\frac{1/j\omega L}{1/R_3+1/j\omega L}I_1 = \frac{R_2}{R_2+Z_{1a}}\cdot\frac{R_3}{R_3+j\omega L}I_1 = \frac{30}{30+\frac{10(2+j5)}{2+j}}\cdot\frac{2}{2+j}I_1 \\
&= \frac{60}{60+j30+20+j50}\cdot I_1 = \frac{60}{80+j80}\cdot 4 = \frac{3}{1+j} = \frac{3}{2}(1-j)\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

- 電圧源 V_2 のみのときの短絡電流 I_{s2}



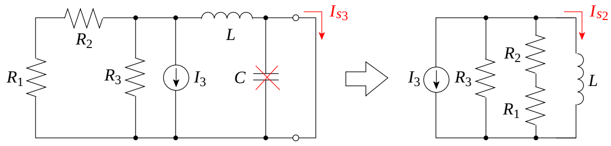
R_1，R_2，L の合成インピーダンス Z_{2a} は

$$
Z_{2a} = \frac{(R_1+R_2)\cdot j\omega L}{(R_1+R_2)+j\omega L} = \frac{j800}{40+j20} = \frac{j40}{2+j}
$$

したがって，求める電流は分流の法則を利用して

$$
\begin{aligned}
I_{s2} &= \frac{V_2}{R_3+Z_{2a}}\cdot\frac{1/j\omega L}{1/(R_1+R_2)+1/j\omega L} = \frac{80}{40+\frac{j40}{2+j}}\cdot\frac{40}{40+j20} = \frac{2}{1+\frac{j}{2+j}}\cdot\frac{2}{2+j} \\
&= \frac{4}{2+j+j} = \frac{2}{1+j} = 1-j\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

- 電流源 I_3 のみのときの短絡電流 I_{s3}



R_1，R_2，R_3 の合成インピーダンス ZZ_{3a} は

$$
Z_{3a} = (R_1+R_2)//R_3 = 40//40 = 20\ \Omega
$$

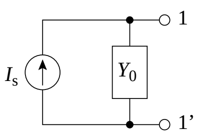
であるので，分流の法則より

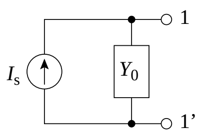
$$
I_{s3} = -\frac{1/j\omega L}{1/Z_{3a}+1/j\omega L}I_3 = -\frac{Z_{3a}}{Z_{3a}+j\omega L}I_3 = -\frac{20}{20+j20}\cdot 1 = -\frac{1}{1+j} = -\frac{1}{2}(1-j)\ \mathrm{A}
$$

以上より，全ての電源を考慮した短絡電流は

$$
I_s = I_{s1}+I_{s2}+I_{s3} = \frac{3}{2}(1-j)+(1-j)-\frac{1}{2}(1-j) = 2(1-j)\ \mathrm{A}
$$

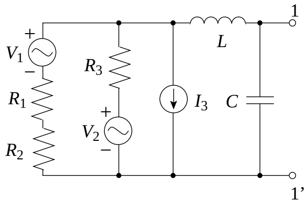
したがって，ノルトン等価回路，テブナン等価回路は以下のように書ける．





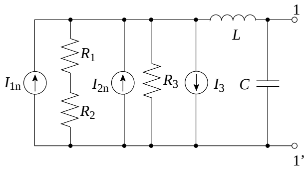
$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1+j3}{40}\ \mathrm{S} \\
I_s &= 2(1-j)\ \mathrm{A}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
Z_0 &= 4(1-j3)\ \Omega \\
V_f &= Z_0 I_s = 8(1-j)(1-j3) = -16(1+j2)\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

2. **別解**
回路を部分的にテブナン等価回路やノルトン等価回路に置き換えることでより簡単に全体の等価回路を求められる場合もあるまず，電流源 I_1 と抵抗 R_2 をテブナン等価回路に置き換えると下図の回路になる．



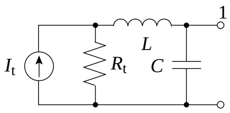
$$V_1 = R_2 I_1 = 120 \text{ V}$$

さらに電圧源 V_1 と抵抗 $R_1 + R_2$，電圧源 V_2 と抵抗 R_3 をそれぞれノルトン等価回路に置き換えると，下図の回路になる．



$$I_{1n} = \frac{V_1}{R_1 + R_2} = 3 \text{ A}, \quad I_{2n} = \frac{V_2}{R_3} = 2 \text{ A}$$

さらに電流源と抵抗をまとめると下図の回路になる．



$$I_t = I_{1n} + I_{2n} - I_3 = 4 \text{ A}, \quad R_t = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{(R_1 + R_2) + R_3} = 20 \ \Omega$$

上図の回路に対してノルトン等価回路を求めると，内部インピーダンス Z_0 は

$$\begin{aligned} Z_0 &= (R_t + j\omega L)//(1/j\omega C) = (20 + j20)/(-j10) = \frac{-j10(20 + j20)}{20 + j20 - j10} = \frac{-j20(1 + j)}{2 + j} \\ &= -j4(1 + j)(2 - j) = -j4(3 + j) = 4(1 - j3) \ \Omega \end{aligned}$$

であり，内部アドミタンス Y_0 は

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{4(1 - j3)} = \frac{1 + j3}{40} \text{ S}$$

である．一方，短絡電流は分流の法則より

$$I_s = \frac{1/j\omega L}{1/R_t + 1/j\omega L} \cdot I_t = \frac{R_t}{R_t + j\omega L} I_t = \frac{20}{20 + j20} I_t = \frac{1}{1 + j} 4 = 2(1 - j) \text{ A}$$

3. **別解 (テブナン等価回路を求める)**