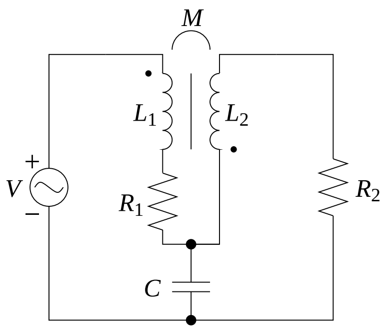
平成 22 年度電気回路 I 第 1 回 宿題

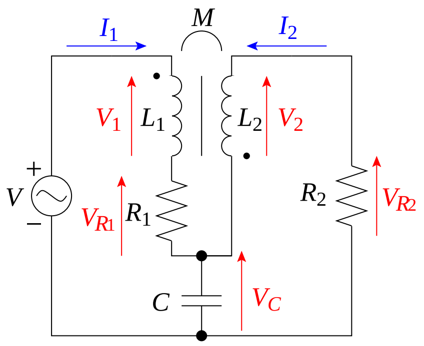
宿題

以下の回路の抵抗 R_1，R_2 に流れる電流 I_1，I_2 を求めよ．ただし，$R_1 = 17\ \Omega$，$R_2 = 28\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{20\pi}$ H，$L_2 = \frac{1}{5\pi}$ H，$M = \frac{2}{25\pi}$ H，$C = \frac{1}{2\pi}$ mF，$V = 150$ V，電源の周波数 $f = 50$ Hz とする．また，この変成器の結合係数 k はいくらか．



解答

以下の図のように各部の電圧と電流を設定する．



このとき，それぞれの電圧は電流 I_1，I_2 を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 = j5I_1 - j8I_2 \\
V_2 &= -j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = -j8I_1 + j20I_2 \\
V_{R1} &= R_1 I_1 = 17I_1 \\
V_{R2} &= -R_2 I_2 = -28I_2 \\
V_C &= \frac{I_1 + I_2}{j\omega C} = -j20(I_1 + I_2)
\end{aligned}
$$

したがって，キルヒホッフの電圧則を左側の閉路と右側の閉路に適用すると以下の式を得る．

$$
\begin{matrix} V = V_1 + V_{R1} + V_C \\ V_2 + V_C = V_{R2} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 150 = (j5I_1 - j8I_2) + 17I_1 - j20(I_1 + I_2) \\ (-j8I_1 + j20I_2) - j20(I_1 + I_2) = -28I_2 \end{matrix}
$$

これらの式を整理すると以下の連立一次方程式を得る．

$$
\begin{aligned}
(17 - j15)I_1 - j28I_2 &= 150 \\
-j28I_1 + 28I_2 &= 0
\end{aligned}
$$

この連立一次方程式を解くと，第 2 式から $I_2 = jI_1$ であるので，これを第 1 式に代入して I_1 は

$$
(17 - j15)I_1 + 28I_1 = 150 \quad \rightarrow \quad (45 - j15)I_1 = 150 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{10}{3 - j} = 3 + j
$$

と求まるので，I_1，I_2 は

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 3 + j \text{ A} \\
I_2 &= jI_1 = -j + j3 \text{ A}
\end{aligned}
$$

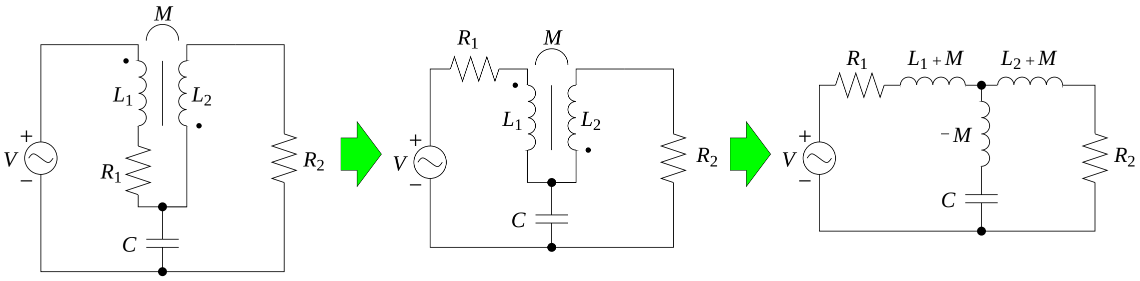
と求まる．

また，この変成器の結合係数 k は

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{\frac{2}{25\pi}}{\sqrt{\frac{1}{20\pi}\cdot\frac{1}{5\pi}}}=\frac{2}{25\pi}\cdot 10\pi=\frac{4}{5}=0.8$$

(別解)

ところで，この回路は以下のようにT形等価回路を用いて解くこともできる



このとき回路の合成インピーダンス Z_t は

$$\begin{aligned}Z_t &= R_1+j\omega(L_1+M)+\frac{\left(-j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)(R_2+j\omega(L_2+M))}{\left(-j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)+(R_2+j\omega(L_2+M))}\\ &= 17+j13+\frac{-j28(28+j28)}{-j28+(28+j28)}\\ &= 17+j13-j(28+j28)=45-j15=15(3-j)\end{aligned}$$

であるので，電源から出る電流 I_1 は

$$I_1=\frac{V}{Z_t}=\frac{150}{15(3-j)}=\frac{10}{3-j}=3+j\ \mathrm{A}$$

電流 I_2 を抵抗 R_2 に下から上へ流れる向きを正にとると，I_2 は分流の法則より

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{\left(-j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)}{\left(-j\omega M+\frac{1}{j\omega C}\right)+(R_2+j\omega(L_2+M))}(-I_1)=\frac{-j28}{-j28+(28+j28)}(-I_1)\\ &= jI_1=-1+j3\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

と求まる．