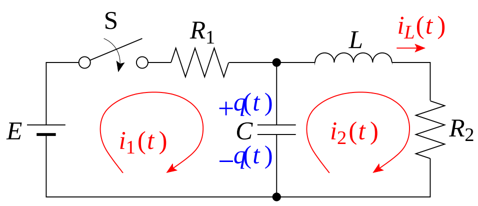
# 電気回路演習 第 15 回 (平成 22 年 7 月 26 日 (月))

## 演習

図に示す回路においてスイッチ S を開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を閉じ，この閉じた時刻を $t=0$ とする．ここで，閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めることを考える．以下の設問に答えなさい．ただし，$R_1 = 8\ \Omega$，$R_2 = 7\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = \frac{1}{8}$ F，$E = 4$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i_L(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めなさい．

(b) 図に示した閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を用いて，$t \geq 0$ の閉路方程式を求めなさい．

(c) ラプラス変換された閉路方程式を求め，行列の形で表しなさい．

(d) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

## 演習解答

(a) 時刻 $t=0$ において $i_L(0)$，$q(0)$ はそれぞれ

$$i_L(0) = 0 \text{ A},\quad q(0) = 0 \text{ C}$$

(b) キルヒホッフの電圧則より

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int \{i_1(t) - i_2(t)\}\, dt = E$$
$$R_2 i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int \{i_2(t) - i_1(t)\}\, dt = 0$$

上式に与えられた数値を代入すると

$$8i_1(t) + 8\int \{i_1(t) - i_2(t)\}\, dt = 4$$
$$7i_2(t) + \frac{di_2(t)}{dt} + 8\int \{i_2(t) - i_1(t)\}\, dt = 0$$

(c) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I_1(s)$，$I_2(s)$ とすると

$$8I_1(s) + \frac{8}{s}\left[I_1(s) - I_2(s) + \int \{i_1(t) - i_2(t)\}\Big|_{t=0}\right] dt = \frac{4}{s}$$
$$7I_2(s) + \{sI_2(s) - i_2(0)\} + \frac{8}{s}\left[I_2(s) - I_1(s) + \int \{i_2(t) - i_1(t)\}\Big|_{t=0}\right] dt = 0$$

設問 (a) で求めた $t=0$ での初期条件を考慮し，$I_1(s)$，$I_2(s)$ について整理すると

$$\left(8 + \frac{8}{s}\right) I_1(s) - \frac{8}{s} I_2(s) = \frac{4}{s}$$
$$-\frac{8}{s} I_1(s) + \left(7 + s + \frac{8}{s}\right) I_2(s) = 0$$

上式を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} 8 + \frac{8}{s} & -\frac{8}{s} \\ -\frac{8}{s} & 7 + s + \frac{8}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) 設問 (c) で導出した連立 1 次方程式を解くため Cramer の公式を用いる．まず行列式 $\Delta$ は

$$\begin{aligned}\Delta &= 8\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(7+s+\frac{8}{s}\right)-\left(-\frac{8}{s}\right)^2 = 8\left(7+s+\frac{8}{s}+\frac{7}{s}+1\right)\\ &= \frac{8}{s}\left(s^2+8s+15\right) = \frac{8}{s}(s+3)(s+5)\end{aligned}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ はそれぞれ

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix}\frac{4}{s} & -\frac{8}{s}\\ 0 & 7+s+\frac{8}{s}\end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{4}{s}\left(7+s+\frac{8}{s}\right)}{\frac{8}{s}(s+3)(s+5)} = \frac{s^2+7s+8}{2s(s+3)(s+5)}$$

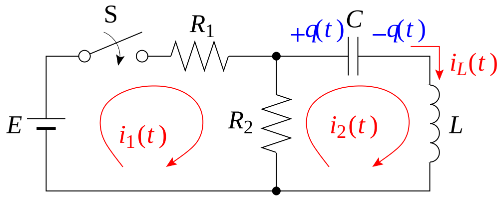
$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix}8+\frac{8}{s} & \frac{4}{s}\\ -\frac{8}{s} & 0\end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{32}{s^2}}{\frac{8}{s}(s+3)(s+5)} = \frac{4}{s(s+3)(s+5)}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned}i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_1(s)\right\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+5)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-5}\\ &= \left.\frac{s^2+7s+8}{2(s+3)(s+5)}e^{st}\right|_{s=0} + \left.\frac{s^2+7s+8}{2s(s+5)}e^{st}\right|_{s=-3} + \left.\frac{s^2+7s+8}{2s(s+3)}e^{st}\right|_{s=-5}\\ &= \frac{4}{15}+\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{10}e^{-5t}\ \text{[A]}\\ i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_2(s)\right\} = sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+5)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-5}\\ &= \left.\frac{4}{(s+3)(s+5)}e^{st}\right|_{s=0} + \left.\frac{4}{s(s+5)}e^{st}\right|_{s=-3} + \left.\frac{4}{s(s+3)}e^{st}\right|_{s=-5}\\ &= \frac{4}{15}-\frac{2}{3}e^{-3t}+\frac{2}{5}e^{-5t}\ \text{[A]}\end{aligned}$$

## 小テスト

図に示す回路においてスイッチ S を開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を閉じ，この閉じた時刻を $t=0$ とする．ここで，閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めることを考える．以下の設問に答えなさい．ただし，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 4\ \Omega$，$L = \frac{1}{4}$ H，$C = \frac{1}{3}$ F，$E = 8$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i_L(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めなさい．

(b) 図に示した閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を用いて，$t \geq 0$ の閉路方程式を求めなさい．

(c) ラプラス変換された閉路方程式を求め，行列の形で表しなさい．

(d) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

## 小テスト解答

(a) 時刻 $t=0$ において $i_L(0)$，$q(0)$ はそれぞれ

$$i_L(0) = 0\ \text{A},\quad q(0) = 0\ \text{C}$$

(b) キルヒホッフの電圧則より

$$\begin{aligned}
&R_1 i_1(t) + R_2\left\{i_1(t) - i_2(t)\right\} = E \\
&R_2\left\{i_2(t) - i_1(t)\right\} + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt = 0
\end{aligned}$$

上式に与えられた数値を代入すると

$$\begin{cases}
4i_1(t) + 4\left\{i_1(t) - i_2(t)\right\} = 8 \\
4\left\{i_2(t) - i_1(t)\right\} + \dfrac{1}{4}\dfrac{di_2(t)}{dt} + 3\displaystyle\int i_2(t)dt = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
8i_1(t) - 4i_2(t) = 8 \\
-4i_1(t) + 4i_2(t) + \dfrac{1}{4}\dfrac{di_2(t)}{dt} + 3\displaystyle\int i_2(t)dt = 0
\end{cases}$$

(c) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I_1(s)$，$I_2(s)$ とすると

$$\begin{cases}
8I_1(s) - 4I_2(s) = \dfrac{8}{s} \\
-4I_1(s) + 4I_2(s) + \dfrac{1}{4}\left\{sI_2(s) - i_2(0)\right\} + \dfrac{3}{s}\left\{I_2(s) + \displaystyle\int i_2(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = 0
\end{cases}$$

上式に設問 (a) で求めた $t=0$ での初期条件を考慮し，$I_1(s)$，$I_2(s)$ について整理すると

$$\begin{cases}
8I_1(s) - 4I_2(s) = \dfrac{8}{s} \\
-4I_1(s) + \left(4 + \dfrac{1}{4}s + \dfrac{3}{s}\right) I_2(s) = 0
\end{cases}$$

上式を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 + \dfrac{s}{4} + \dfrac{3}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) 設問 (c) で導出した連立 1 次方程式を解くため Cramer の公式を用いる．まず行列式 $\Delta$ は

$$\Delta \quad = \quad 8\left(4+\frac{s}{4}+\frac{3}{s}\right)-(-4)^2 = 16+2s+\frac{24}{s} = \frac{2}{s}\left(s^2+8s+12\right) = \frac{2}{s}(s+2)(s+6)$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ はそれぞれ

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{s} & -4 \\ 0 & 4+\frac{s}{4}+\frac{3}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{8}{s}\left(4+\frac{s}{4}+\frac{3}{s}\right)}{\frac{2}{s}(s+2)(s+6)} = \frac{s^2+16s+12}{s(s+2)(s+6)}$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & \frac{8}{s} \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{32}{s}}{\frac{2}{s}(s+2)(s+6)} = \frac{16}{(s+2)(s+6)}$$

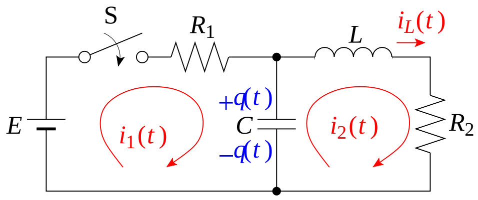
$I_1(s)$，$I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned}
i_1(t) \quad &= \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{I_1(s)\right\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+6)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\
&= \quad \frac{s^2+16s+12}{(s+2)(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=0} + \frac{s^2+16s+12}{s(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=-2} + \frac{s^2+16s+12}{s(s+2)}e^{st}\bigg|_{s=-6} \\
&= \quad 1+2e^{-2t}-2e^{-6t}\ [\mathrm{A}] \\
i_2(t) \quad &= \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{I_2(s)\right\} = (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+6)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\
&= \quad \frac{16}{s+6}e^{st}\bigg|_{s=-2} + \frac{16}{s+2}e^{st}\bigg|_{s=-6} \\
&= \quad 4e^{-2t}-4e^{-6t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}$$

# 電気回路演習 第 15 回 (平成 22 年 7 月 26 日 (月))

## 演習

図に示す回路においてスイッチ S を開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を閉じ，この閉じた時刻を $t=0$ とする．ここで，閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めることを考える．以下の設問に答えなさい．ただし，$R_1 = 8\ \Omega$，$R_2 = 7\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = \frac{1}{8}$ F，$E = 4$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i_L(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めなさい．

(b) $t \geq 0$ において，図に示した回路をラプラス変換した $s$ 領域の回路を示しなさい．

(c) ラプラス変換された閉路方程式を求め，行列の形で表しなさい．

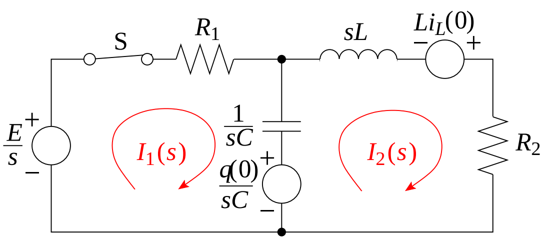
(d) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

## 演習解答

(a) 時刻 $t=0$ において $i_L(0)$，$q(0)$ はそれぞれ

$$i_L(0) = 0\ \mathrm{A},\quad q(0) = 0\ \mathrm{C}$$

(b) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I_1(s)$，$I_2(s)$ とすると，問題図の回路の $s$ 領域の回路は以下のように書ける




図

(c) 閉路方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{sC} & -\dfrac{1}{sC} \\ -\dfrac{1}{sC} & R_2 + sL + \dfrac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{s} - \dfrac{q(0)}{sC} \\ \dfrac{q(0)}{sC} + Li_L(0) \end{bmatrix}$$

これに与えられている数値を代入し，設問 (a) で求めた初期条件を考慮すると，以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} 8 + \dfrac{8}{s} & -\dfrac{8}{s} \\ -\dfrac{8}{s} & 7 + s + \dfrac{8}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) 設問 (c) で導出した連立 1 次方程式を解くため Cramer の公式を用いる．まず行列式 $\Delta$ は

$$\begin{aligned} \Delta &= 8\left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(7 + s + \frac{8}{s}\right) - \left(-\frac{8}{s}\right)^2 = 8\left(7 + s + \frac{8}{s} + \frac{7}{s} + 1\right) \\ &= \frac{8}{s}\left(s^2 + 8s + 15\right) = \frac{8}{s}(s+3)(s+5) \end{aligned}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ はそれぞれ

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{s} & -\frac{8}{s} \\ 0 & 7+s+\frac{8}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{4}{s}\left(7+s+\frac{8}{s}\right)}{\frac{8}{s}(s+3)(s+5)} = \frac{s^2+7s+8}{2s(s+3)(s+5)}$$

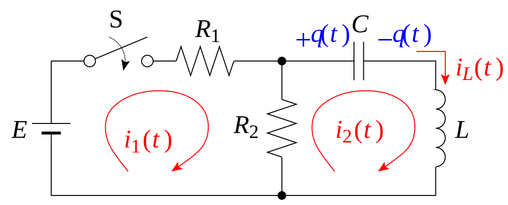
$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8+\frac{8}{s} & \frac{4}{s} \\ -\frac{8}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{32}{s^2}}{\frac{8}{s}(s+3)(s+5)} = \frac{4}{s(s+3)(s+5)}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_1(s)\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+5)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-5} \\
&= \frac{s^2+7s+8}{2(s+3)(s+5)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{s^2+7s+8}{2s(s+5)}e^{st}\Bigg|_{s=-3} + \frac{s^2+7s+8}{2s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-5} \\
&= \frac{4}{15} + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{10}e^{-5t} \text{ [A]} \\
i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_2(s)\} = sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+5)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-5} \\
&= \frac{4}{(s+3)(s+5)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{4}{s(s+5)}e^{st}\Bigg|_{s=-3} + \frac{4}{s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-5} \\
&= \frac{4}{15} - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{2}{5}e^{-5t} \text{ [A]}
\end{aligned}$$

### 小テスト

図に示す回路においてスイッチ S を開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，スイッチ S を閉じ，この閉じた時刻を $t=0$ とする．ここで，閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めることを考える．以下の設問に答えなさい．ただし，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=4\ \Omega$，$L=\frac{1}{4}$ H，$C=\frac{1}{3}$ F，$E=8$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i_L(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めなさい．

(b) $t \geq 0$ において，図に示した回路をラプラス変換した $s$ 領域の回路を示しなさい．

(c) ラプラス変換された閉路方程式を求め，行列の形で表しなさい．

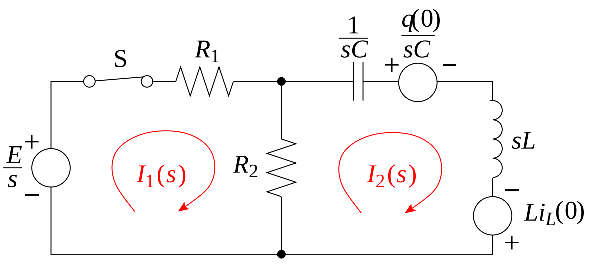
(d) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

### 小テスト解答

(a) 時刻 $t=0$ において $i_L(0)$，$q(0)$ はそれぞれ

$$i_L(0)=0\ \mathrm{A},\quad q(0)=0\ \mathrm{C}$$

(b) 電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I_1(s)$，$I_2(s)$ とすると，問題図の回路の $s$ 領域の回路は以下のように書ける




図

(c) 閉路方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+sL+\dfrac{1}{sC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{E}{s} \\ -\dfrac{q(0)}{sC}+Li_L(0) \end{bmatrix}$$

これに与えられている数値を代入し，設問 (a) で求めた初期条件を考慮すると，以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4+\dfrac{s}{4}+\dfrac{3}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{8}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) 設問 (c) で導出した連立 1 次方程式を解くため Cramer の公式を用いる．まず行列式 $\Delta$ は

$$\Delta \quad = \quad 8\left(4+\frac{s}{4}+\frac{3}{s}\right)-(-4)^2=16+2s+\frac{24}{s}=\frac{2}{s}\left(s^2+8s+12\right)=\frac{2}{s}(s+2)(s+6)$$

$I_1(s)$, $I_2(s)$ はそれぞれ

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{s} & -4 \\ 0 & 4 + \frac{s}{4} + \frac{3}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{8}{s}\left(4 + \frac{s}{4} + \frac{3}{s}\right)}{\frac{2}{s}(s+2)(s+6)} = \frac{s^2 + 16s + 12}{s(s+2)(s+6)}$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & \frac{8}{s} \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{32}{s}}{\frac{2}{s}(s+2)(s+6)} = \frac{16}{(s+2)(s+6)}$$

$I_1(s)$, $I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_1(s)\right\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+6)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\
&= \frac{s^2+16s+12}{(s+2)(s+6)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{s^2+16s+12}{s(s+6)}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{s^2+16s+12}{s(s+2)}e^{st}\Bigg|_{s=-6} \\
&= 1 + 2e^{-2t} - 2e^{-6t}\ [\mathrm{A}] \\
i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_2(s)\right\} = (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+6)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\
&= \frac{16}{s+6}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{16}{s+2}e^{st}\Bigg|_{s=-6} \\
&= 4e^{-2t} - 4e^{-6t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}$$