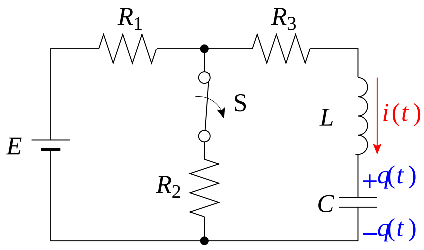
## 電気回路演習 第14回 (平成22年7月21日 (水))

### 演習

図に示す回路においてスイッチSを閉じた状態で十分な時間が経過し，定常状態になった後，スイッチSを開く場合を考える．スイッチSを開いた時刻を $t=0$ とする．以下の設問に答えなさい．なお，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{10}$ H，$C = \frac{1}{50}$ F，$E = 10$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めなさい．

(b) 時刻 $0 \le t$ での回路方程式を，電流 $i(t)$ を用いて表しなさい．

(c) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とする．$I(s)$ を用いてラプラス変換された回路方程式を求めなさい．

(d) $I(s)$ を求めなさい．

(e) 電流 $i(t)$ を求めなさい．

### 演習解答

(a) まず，時刻 $t=0$ での初期条件 $i(0)$，$q(0)$ を求る．

$i(0)$ ：直流電源で，定常状態なので

$$i(0) = 0\ [\mathrm{A}]$$

$q(0)$ ：コンデンサ $C$ にかかる電圧 $V_c$ は

$$V_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2\ [\mathrm{V}]$$

よってコンデンサの電荷は

$$q(0) = CV_c = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}\ [\mathrm{C}]$$

(b) コンデンサ $C$ に蓄えられる電荷 $q(t)$ と電流 $i(t)$ の関係 $q(t) = \displaystyle\int i(t)dt$ を用いると，回路方程式は

$$(R_1 + R_3)i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$6i(t) + \frac{1}{10}\frac{di(t)}{dt} + 50\int i(t)dt = 10$$
$$\frac{di(t)}{dt} + 60i(t) + 500\int i(t)dt = 100$$

(c) 設問 (b) で求めた方程式をラプラス変換すると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 60I(s) + 500\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{100}{s}$$

であり，設問 (a) で求めた初期条件 $i(0)$，$q(0)$ を方程式に代入すると

$$sI(s) + 60I(s) + 500\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{25s}\right\} = \frac{100}{s}$$
$$sI(s) + 60I(s) + \frac{500}{s}I(s) = \frac{80}{s}$$

(d) 設問 (c) で求めた式から $I(s)$ を求めると

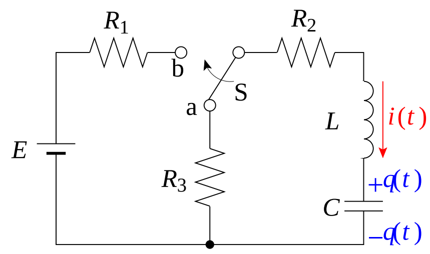
$$I(s) = \frac{\frac{80}{s}}{s + 60 + \frac{500}{s}} = \frac{80}{s^2 + 60s + 500} = \frac{80}{(s+10)(s+50)}$$

(e) 設問 (d) で求めた $I(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = (s+10)I(s)e^{st}\big|_{s=-10} + (s+50)I(s)e^{st}\big|_{s=-50} \\ &= \frac{80}{s+50}e^{st}\Big|_{s=-10} + \frac{80}{s+10}e^{st}\Big|_{s=-50} \\ &= 2e^{-10t} - 2e^{-50t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

**小テスト**

図に示す回路においてスイッチ S が端子 a に接続された状態で十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．その後，スイッチ S を端子 b に切り換えたとする．スイッチ S を切り換えた時刻を $t=0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 3\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$L = \frac{1}{2}$ H，$C = \frac{1}{12}$ F，$E = 15$ V とする．




図

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタ $L$ に流れている電流 $i(0)$ とコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めよ．

(b) 時刻 $0 \leq t$ での回路方程式を，電流 $i(t)$ を用いて表しなさい．

(c) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とする．$I(s)$ を用いてラプラス変換された回路方程式を求めなさい．

(d) $I(s)$ を求めなさい．

(e) 電流 $i(t)$ を求めなさい．

**小テスト解答**

(a) 時刻 $t=0$ でインダクタを流れる電流 $i(0)$，コンデンサの電荷 $q(0)$ は

$$i(0) = 0\ [\mathrm{A}], \qquad q(0) = 0\ [\mathrm{C}]$$

である．

(b) コンデンサ $C$ に蓄えられる電荷 $q(t)$ と電流 $i(t)$ の関係 $q(t) = \displaystyle\int i(t)dt$ を用いると，回路方程式は

$$(R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$5i(t) + \frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt} + 12\int i(t)dt = 15$$
$$\frac{di(t)}{dt} + 10i(t) + 24\int i(t)dt = 30$$

(c) 設問 (b) で求めた方程式をラプラス変換すると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 10I(s) + 24\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = \frac{30}{s}$$

であり，設問 (a) で求めた初期条件をラプラス変換された式に代入すると

$$sI(s) + 10I(s) + \frac{24}{s}I(s) = \frac{30}{s}$$

(d) 設問 (c) で求めた式から $I(s)$ を求めると

$$I(s) = \frac{\frac{30}{s}}{s + 10 + \frac{24}{s}} = \frac{30}{s^2 + 10s + 24} = \frac{30}{(s+4)(s+6)}$$

(e) 設問 (d) で求めた $I(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = \left.(s+4)I(s)e^{st}\right|_{s=-4} + \left.(s+6)I(s)e^{st}\right|_{s=-6} \\
&= \left.\frac{30}{s+6}e^{st}\right|_{s=-4} + \left.\frac{30}{s+4}e^{st}\right|_{s=-6} \\
&= 15e^{-4t} - 15e^{-6t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$