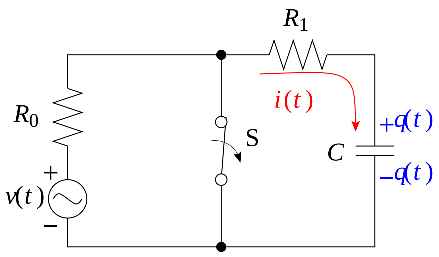
電気回路演習 第 13 回 (平成 22 年 7 月 12 日 (月))

演習

図の回路においてスイッチ S を閉じて十分な時間が経過した後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．なお，交流電源を $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$ とする．



図

(a) コンデンサの電荷の時間変化を $q(t)$ として，この $q(t)$ を用いて $t\geq 0$ での回路方程式を求めなさい．

(b) 定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t\geq 0$ で回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) 電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ を用いると回路方程式は

$$(R_0+R_1)i(t)+\frac{q(t)}{C}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

となる．コンデンサに流れる電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の関係 $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ を用いると，上式は

$$(R_0+R_1)\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ に対する方程式は

$$(R_0+R_1)\frac{dq_s(t)}{dt}+\frac{q_s(t)}{C}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

交流理論を用いると，複素振幅を Q_s，$d/dt\to j\omega$ として

$$j\omega Q_s(R_0+R_1)+\frac{Q_s}{C}=V_me^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと

$$\begin{aligned}Q_s&=\frac{V_me^{j\theta}}{j\omega(R_0+R_1)+\frac{1}{C}}=\frac{CV_me^{j\theta}}{1+j\omega C(R_0+R_1)}\\&=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_0+R_1)\}^2}}e^{j(\theta-\phi)}\qquad(\phi=\tan^{-1}\{\omega C(R_0+R_1)\})\end{aligned}$$

上式の時間領域での表現を求めると

$$\begin{aligned}q_s(t)&=\mathrm{Im}\left\{Q_se^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_0+R_1)\}^2}}e^{j(\omega t+\theta-\phi)}\right\}\\&=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_0+R_1)\}^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi)\end{aligned}$$

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ に対する方程式は

$$(R_0+R_1)\frac{dq_t(t)}{dt}+\frac{q_t(t)}{C}=0$$

上式の解は

$$q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{C(R_0+R_1)}} \qquad (A:\text{積分定数})$$

(d) 設問 (a) で求めた回路方程式の一般解 $q(t)$ は，設問 (b)，(c) の結果から

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)+Ae^{-\frac{t}{C(R_0+R_1)}}$$
$$\left(Q_m=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_0+R_1)\}^2}}\right)$$

である．初期条件として $t=0$ で $q(0)=0$ を用いると

$$q(0)=Q_m\sin(\theta-\phi)+A=0 \qquad \to \qquad A=-Q_m\sin(\theta-\phi)$$

以上より

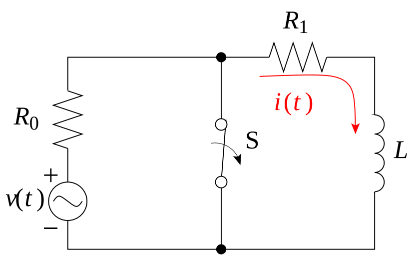
$$q(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)-Q_m\sin(\theta-\phi)e^{-\frac{t}{C(R_0+R_1)}}$$

よって，電流 $i(t)$ は

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\omega Q_m\cos(\omega t+\theta-\phi)+\frac{Q_m}{C(R_0+R_1)}\sin(\theta-\phi)e^{-\frac{t}{C(R_0+R_1)}}$$
$$Q_m=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_0+R_1)\}^2}}, \qquad \phi=\tan^{-1}\{\omega C(R_0+R_1)\}$$

小テスト

図の回路においてスイッチ S を閉じて十分な時間が経過した後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．なお，交流電源を $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$，インダクタ L に流れる電流を $i(t)$ とする．



図

(a) 時刻 $t \geq 0$ での，図の回路の回路方程式を求めなさい．

(b) 過渡解 $i_t(t)$ を求めなさい．

(c) 定常解 $i_s(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t \geq 0$ でインダクタ L に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) キルヒホッフの電圧則より

$$(R_0 + R_1)i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $i_t(t)$ に対する方程式は

$$(R_0 + R_1)i_t(t) + L\frac{i_t(t)}{dt} = 0$$

上式に対する解は

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R_0+R_1}{L}t} \qquad (A : \text{積分定数})$$

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $i_s(t)$ に対する方程式は

$$(R_0 + R_1)i_s(t) + L\frac{di_s(t)}{dt} = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

交流理論を用いると，複素電流振幅を I_s，$d/dt \to j\omega$ として

$$(R_0 + R_1)I_s + j\omega L I_s = V_m e^{j\theta}$$

上式を I_s について解くと

$$I_s = \frac{V_m e^{j\theta}}{(R_0 + R_1) + j\omega L} = \frac{V_m e^{j(\theta-\phi)}}{\sqrt{(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2}} \qquad \left(\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_0 + R_1}\right)$$

上式の時間領域での表現を求めると

$$\begin{aligned} i_s(t) &= \mathrm{Im}\left\{I_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m}{\sqrt{(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\theta-\phi)} \cdot e^{j\omega t}\right\} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) \end{aligned}$$

(d) 電流 $i(t)$ は設問 (b)，(c) の結果から

$$i(t) = i_t(t) + i_s(t) = Ae^{-\frac{R_0+R_1}{L}t} + \frac{V_m}{\sqrt{(R_0+R_1)^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t + \theta - \phi)$$

$t=0$ での初期条件 $i(0)=0$ を用いると

$$i(0) = A + \frac{V_m}{\sqrt{(R_0+R_1)^2+(\omega L)^2}}\sin(\theta - \phi) = 0$$

$$A = -\frac{V_m}{\sqrt{(R_0+R_1)^2+(\omega L)^2}}\sin(\theta - \phi)$$

よって，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{(R_0+R_1)^2+(\omega L)^2}}\left\{\sin(\omega t + \theta - \phi) - \sin(\theta - \phi)\cdot e^{-\frac{R_0+R_1}{L}t}\right\}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_0+R_1}$$