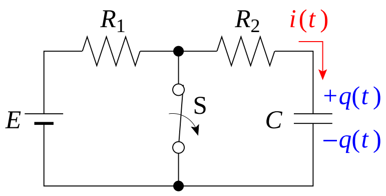
電気回路演習 第 12 回 (平成 22 年 7 月 5 日 (月))

演習

図に示す回路においてスイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．



図

(a) スイッチ S を開いた後 ($t \geq 0$)，コンデンサ C に蓄えられている電荷を $q(t)$ とする．$q(t)$ を用いて，時刻 $t \geq 0$ での回路方程式を示しなさい．

(b) コンデンサ C に流れる電流 $i(t)$ と時定数 τ を求めなさい．

演習解答

(a) $t \geq 0$ での回路方程式は，キルヒホッフの電圧則より，$q(t)$，$i(t)$ を用いて

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

である．$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ なる関係式より

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

(b) 設問 (a) で求めた式の定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ

$$\text{定常解} \quad : \quad \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$$

$$\text{過渡解} \quad : \quad (R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

従って，一般解 $q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

初期条件として，$t = 0$ のときコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(0)$ は

$$q(0) = 0$$

である．この初期条件を $q(t)$ の式に代入すると

$$q(0) = CE + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = -CE$$

以上より

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\right)$$

となり，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{C(R_2+R_2)}}$$

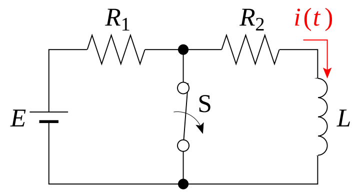
と求まる．また，時定数 τ は

$$\tau = C(R_1 + R_2)$$

である．

小テスト

図に示す回路においてスイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．



図

(a) スイッチ S を開いた後 $(t \geq 0)$，インダクタ L に流れる電流を $i(t)$ とする．$i(t)$ を用いて，時刻 $t \geq 0$ での回路方程式を示しなさい．

(b) インダクタ L に流れる電流 $i(t)$ と時定数 τ を求めなさい．

小テスト解答

(a) $t \geq 0$ での回路方程式は，キルヒホッフの電圧則より以下のように書ける．

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_2)i(t) = E$$

(b) 設問 (a) で求めた式の定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ

$$\text{定常解} \quad : \quad (R_1+R_2)i_s(t) = E \quad \rightarrow \quad i_s(t) = \frac{E}{R_1+R_2}$$

$$\text{過渡解} \quad : \quad L\frac{di_t(t)}{dt} + (R_1+R_2)i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \quad (A\text{ は積分定数})$$

従って，一般解 $i(t)$ は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R_1+R_2} + Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

初期条件として，$t=0$ のときインダクタ L に流れる電流は

$$i(0) = 0$$

である．この初期条件を $i(t)$ の式に代入すると

$$i(0) = \frac{E}{R_1+R_2} + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{E}{R_1+R_2}$$

以上より

$$i(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)$$

と求まる．また，時定数 τ は

$$\tau = \frac{L}{R_1+R_2}$$

である．