平成２１年度電気回路I中間試験 (6月09日実施)

1. 変成器を含む回路について以下の問いに答よ．ただし，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 30\ \Omega$，$C = \frac{1}{5\pi}$ mF，$V = 170$ V，周波数を $f = 50$ Hz とする．

   (a) 図 1 に示す回路で，$L_1 = \frac{1}{5\pi}$ H，$L_2 = \frac{4}{5\pi}$ H，$M = \frac{3}{10\pi}$ H とするとき，2 次側の抵抗 R_2 に流れる電流を求めよ．

   (b) 設問 (a) のとき変成器の結合係数 k を求めよ．

   (c) 図 1′ に示すような理想変成器を含む回路で，1 次側と 2 次側の巻き数比が $1 : n$ であり，$n = 2$ のとき，抵抗 R_2 に流れる電流を求めよ．

2. (a) 図 2 に示す回路の閉路方程式を立て，それを解くことにより，抵抗 R_2 に流れる電流を求めよ．ただし，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 20\ \Omega$，$L = \frac{1}{10\pi}$ H，$C = \frac{1}{3\pi}$ mF，$V_1 = 100$ V，$V_2 = 50$ V，$f = 50$ Hz とする．

   (b) 図 3 に示す回路に対して節点を設定し，節点行列が対称な形になるように，節点方程式を行列の形で書け (解く必要はない)．

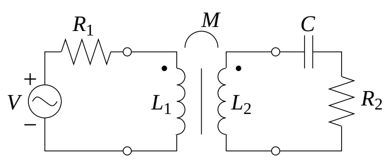


図 1

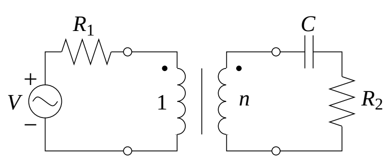


図 1′

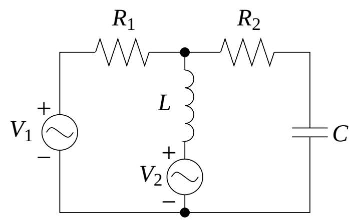


図 2

3. 図 4 の回路の $R_0 = 10\ \Omega$ に関する逆回路を書け．ただし，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$L = 50$ mH，$C = 100\ \mu$F とする．

4. 図 5 の回路を考え，$R = 10\ \Omega$，$L = \frac{1}{10\pi}$ H，$C = \frac{1}{\pi}$ mF，$V_1 = 20$ V，$I_2 = 1$ A，$f = 50$ Hz とする．

   (a) 図 5 の回路のノルトン等価回路，テブナン等価回路を求めよ．

   (b) 図 5 の回路の端子 $1 - 1'$ に抵抗 R_L，コイル L_L，コンデンサ C_L のうちの 2 つの素子を使って構成される負荷を接続し，負荷での消費電力を最大にしたい．消費電力を最大にするための回路を書きその素子値を求めよ．また，そのときの消費電力 $P_{\max}$ を求めよ．

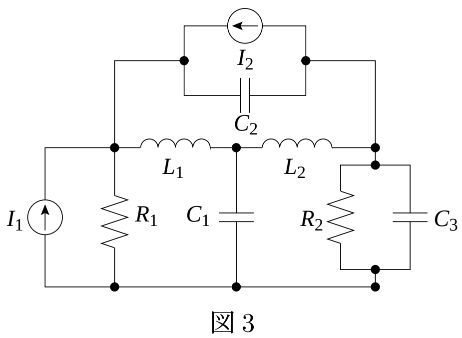


図 3

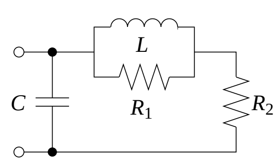


図 4

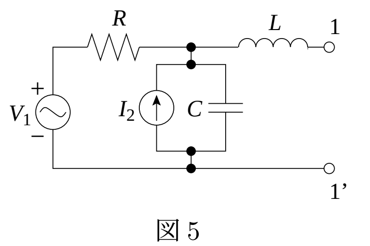
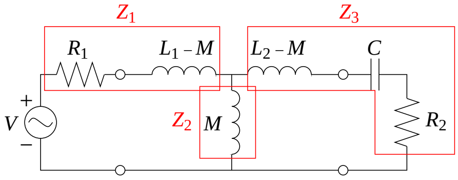


図 5

1. (a) 下図左の変成器の T 形等価回路を考える．



このとき，それぞれのインピーダンスは

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\frac{1}{5\pi} \times 10^{-3} \cdot 100\pi} = -j\frac{1000}{20} = -j50\ \Omega \\
&j\omega(L_1 - M) = j20 - j30 = -j10\ \Omega \\
&j\omega(L_2 - M) = j80 - j30 = j50\ \Omega \\
&j\omega M = j30\ \Omega
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M) = 5 - j10\ \Omega \\
&Z_2 = j30\ \Omega \\
&Z_3 = j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} + R_2 = 30\ \Omega
\end{aligned}
$$

全体のインピーダンス Z_t と電源から流れ出る電流 I_t は

$$
Z_t = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad \rightarrow \quad I_t = \frac{V}{Z_t} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V
$$

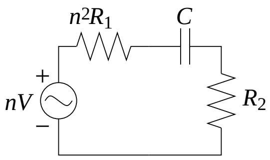
であるので、抵抗 R_2 に流れる電流 I_{R_2} は

$$
\begin{aligned}
I_{R_2} &= I_t \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V = \frac{j30}{j30(5 - j10) + j900 + 30(5 - j10)} \cdot 170 \\
&= \frac{j}{10 + j5 + j30 + 5 - j10} == \frac{j170}{15 + j25} = \frac{j34}{3 + j5} = \frac{j34(3 - j5)}{9 + 25} = 5 + j3\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

(b)

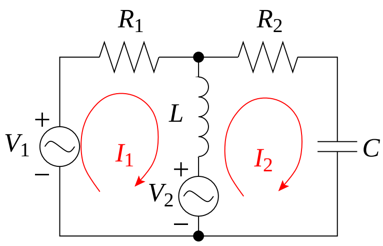
$$
k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{3}{10\pi}}{\sqrt{\frac{1}{5\pi} \cdot \frac{4}{5\pi}}} = \frac{\frac{3}{10\pi}}{\frac{2}{5\pi}} = \frac{3}{4} = 0.75
$$

(c) 1 次側の回路を 2 次側に移して考えると，$V \rightarrow nV$，$R_1 \rightarrow n^2 R_1$ となるので，抵抗 R_2 に流れる電流は



$$
I_{R_2} = \frac{nV}{n^2 R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{2 \cdot 170}{5 \cdot 4 + 30 - j50} = \frac{340}{50(1 - j)} = \frac{34(1 + j)}{5 \cdot 2} = 3.4(1 + j)\ [\mathrm{A}]
$$

2. (a) 下図のように閉路を設定すると閉路方程式は



$$
\begin{bmatrix} V_1 - V_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

数値を代入して

$$
\begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10(1 + j) & -j10 \\ -j10 & 20(1 - j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

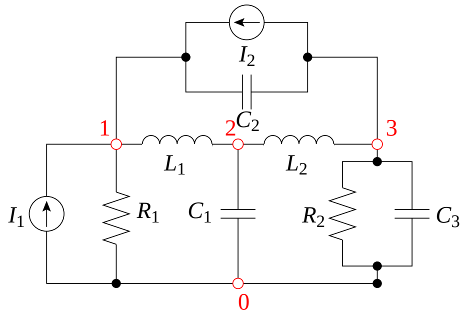
この行列式は

$$\Delta = 200(1+j)(1-j) - (-j10)^2 = 400 + 100 = 500$$

したがって，閉路電流 I_2 は

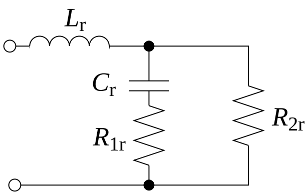
$$I_{R_2} = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10(1+j) & 50 \\ -j10 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{500(1+j)+j500}{500} = 1+j+j = 1+j2 \text{ [A]}$$

(b) 下図のように節点を設定すると



$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_1}\right) & j\frac{1}{\omega L_1} & -j\omega C_2 \\ j\frac{1}{\omega L_1} & j\left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{1}{\omega L_2}\right) & j\frac{1}{\omega L_2} \\ -j\omega C_2 & j\frac{1}{\omega L_2} & \frac{1}{R_2} + j\left\{\omega(C_2+C_3) - \frac{1}{\omega L_2}\right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

3. 直列・並列変換により逆回路は以下のように書ける

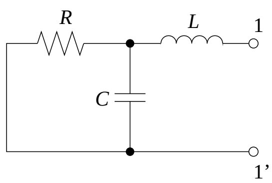


このときの各素子値は

$$R_{1r} = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{100}{5} = 20\ \Omega, \qquad R_{2r} = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{100}{10} = 10\ \Omega,$$
$$L_r = CR_0^2 = 100 \times 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-2} = 10 \text{ mH}$$
$$C_r = \frac{L}{R_0^2} = \frac{50 \times 10^{-3}}{100} = 5 \times 10^{-4} = 500 \ \ \mu\text{F}$$

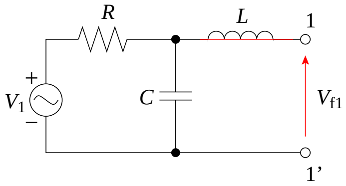
4. (a) テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求める．
ここで，あらかじめ $j\omega L = j10$，$\frac{1}{j\omega C} = -j10$ と計算しておく

- 内部インピーダンス



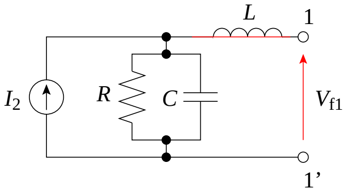
$$\begin{aligned} Z_0 &= j\omega L + \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j10 + \frac{-j100}{10(1-j)} = j10 + \frac{-j10(1+j)}{2} = j10 + 5(1-j) \\ &= 5 + j5 \text{ [}\Omega\text{]} \end{aligned}$$

- 電圧源 V_1 のみが作る開放電圧 V_{f1}



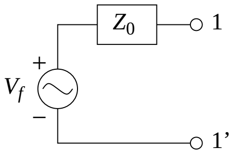
$$V_{f1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_1 = \frac{-j10}{10 - j10} \cdot 20 = \frac{-j20}{1-j} = \frac{-j20(1+j)}{2} = 10(1-j) \text{ [V]}$$

- 電流源 I_2 のみが作る開放電圧 V_{f2}



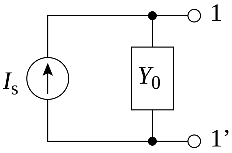
$$V_{f2} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} I_2 = 5(1-j) \cdot 1 = 5(1-j) \text{ [V]}$$

以上よりテブナン等価回路は以下のように書ける．



$$\begin{aligned} Z_0 &= 5 + j5 \text{ [}\Omega\text{]} \\ V_f &= V_{f1} + V_{f2} = 15(1-j) \text{ [V]} \end{aligned}$$

また，ノルトン等価回路は以下のように書ける．

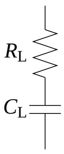


$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{5(1+j)} = \frac{1-j}{10} \text{ [S]} \\ I_s &= Y_0 V_f = \frac{1-j}{10} \cdot 15(1-j) = \frac{3 \cdot (-j2)}{2} = -j3 \text{ [A]} \end{aligned}$$

(b) 最大電力伝送定理 (共役整合条件より) より

$$Z_L = Z_0^* = 5 - j5 \ \Omega$$

インピーダンスの虚数部が負であるので，以下のように抵抗とコンデンサで構成できる．直列回路と並列回路の両方が考えられるが，直列回路の例を示す．



$$R_L - j\frac{1}{\omega C_L} = 5 - j5 \quad \rightarrow \quad R_L = 5$$

$$\frac{1}{\omega C_L} = 5 \quad \rightarrow \quad C_L = \frac{1}{5 \cdot 100\pi} = \frac{1}{500\pi} \text{ F}$$

このとき，負荷で消費される電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4\mathrm{Re}\{Z_0\}} = \frac{|15(1-j)|^2}{4 \cdot 5} = \frac{450}{20} = 22.5 \text{ W}$$