平成２１年度電気回路 I 期末試験 (8 月 04 日実施)

1. 図 1 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする。以下の問いに答えよ。ただし，$R_1 = 5\ \Omega$、$R_2 = 10\ \Omega$、$L = 3$ H、$E = 30$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコイル L に流れる電流 $i(0)$ を求めよ。

   (b) $t \geq 0$ での電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ.

2. 図 2 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする。以下の問いに答えよ。ただし，$R = 3\ \Omega$、$C = 0.125$ F、$v(t) = 25\sin(2t)$ [V] とする。

   (a) $t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めよ.

   (b) $t \geq 0$ で回路に流れる電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ.

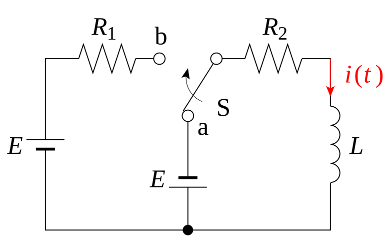

図 1

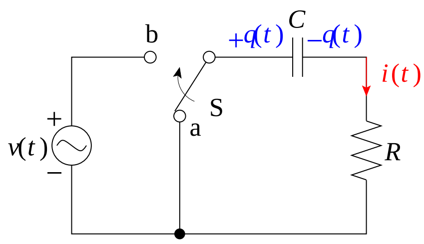

図 2

3. 図 3 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし、$R_1 = 12\ \Omega$，$R_2 = 8\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = 0.05$ F，$E = 100$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(0)$，コイルに流れる電流 $i(0)$ を求めよ.

   (b) $t \geq 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$，流れる電流 $i(t)$ を直接微分方程式を解くことにより求めよ。

   (c) $t \geq 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$，流れる電流 $i(t)$ をラプラス変換を利用して求めよ.

4. 図 4 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする。以下の問いに答えよ。ただし，$R_1 = R_2 = 4\ \Omega$、$L = 1$ H、$C_1 = C_2 = 0.05$ F、$E = 8$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコイル L に流れる電流，コンデンサ C_1，C_2 に蓄えられている電荷を求めよ.

   (b) $t \geq 0$ で抵抗 R_2 に流れる電流 $i_2(t)$ を求めよ.

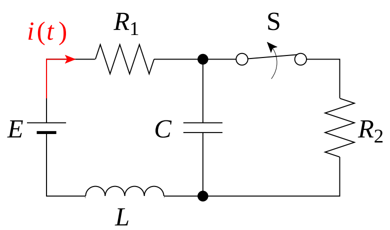

図 3

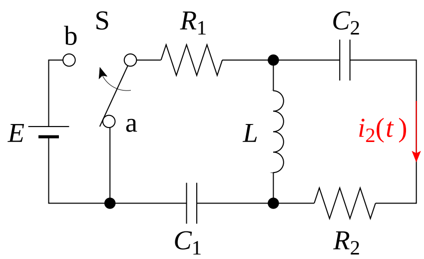

図 4

1. (a) $i(0) = -3$ A

   (b) **直接解法**

   $t \geq 0$ で回路方程式は

   $$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) \quad \rightarrow \quad 3\frac{di(t)}{dt} + 15i(t) = 30 \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = 10$$

   定常解 $i_s(t)$，過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ

   $$\text{定常解} \ : \ \frac{di_s(t)}{dt} + 5i_s(t) = 10 \quad \rightarrow \quad 5i_s(t) = 10 \quad \rightarrow \quad i_s(t) = 2 \text{ A}$$

   $$\text{過渡解} \ : \ \frac{di_t(t)}{dt} + 5i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = Ae^{-5t} \text{ [A]}$$

   したがって，一般解 $i(t)$ は

   $$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = 2 + Ae^{-5t}$$

   $t = 0$ で $i(0) = -3$ A であるので

   $$i(0) = 2 + A = -3 \quad \rightarrow \quad A = -5$$

   よって，求める解は

   $$i(t) = 2 - Ae^{-5t} \text{ [A]}$$

   別解：ラプラス変換

   $t \geq 0$ で回路方程式は

   $$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) \quad \rightarrow \quad 3\frac{di(t)}{dt} + 15i(t) = 30 \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = 10$$

   上式をラプラス変換して初期条件 $i(0) = -3$ A を考慮すると

   $$\{sI(s) - i(0)\} + 5I(s) = \frac{10}{s} \quad \rightarrow \quad sI(s) + 3 + 5I(s) = \frac{10}{s} \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{10 - 3s}{s(s+5)}$$

   以上より，$i(t)$ は $I(s)$ をラプラス逆変換することで

   $$\begin{aligned} i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = sI(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+5)I(s)e^{st}\Big|_{s=-5} = \frac{10-3s}{s+5}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{10-3s}{s}e^{st}\Bigg|_{s=-5} \\ &= 2 - 5e^{-5t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

2. (a) $q(0) = 0$

   (b) **直接解法**

   $t \geq 0$ での回路方程式は，$i(t) = dq(t)/dt$ であることを考慮して

   $$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t) \quad \rightarrow \quad 3\frac{dq(t)}{dt} + 8q(t) = 25\sin(2t)$$

   まず，定常解 $q_s(t)$ は，交流電源の角周波数が $\omega = 2$ であることを考慮して $d/dt \rightarrow j2$ とし，電源の複素振幅を $V = 25$，電荷の複素振幅を Q_s とすると

   $$(8 + j6)Q_s = 25 \quad \rightarrow \quad Q_s = \frac{25}{8 + j6} = \frac{4 - j3}{2} \quad \rightarrow \quad q_s(t) = \mathrm{Im}\left\{Q_s e^{j2t}\right\} = 2\sin 2t - j\frac{3}{2}\cos 2t$$

   一方，過渡解 $q_t(t)$ は

   $$3\frac{dq(t)}{dt} + 8q(t) = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{8}{3}t}$$

   したがって，一般解は

   $$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 2\sin 2t - \frac{3}{2}\cos 2t + Ae^{-\frac{8}{3}t}$$

   ここで，$t = 0$ での初期条件 $q(0) = 0$ を考慮すると

   $$-\frac{3}{2} + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{2} \tag{1}$$

以上より

$$q(t) = 2\sin 2t - \frac{3}{2}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-\frac{8}{3}t} \ [\mathrm{C}]$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 4\cos 2t + 3\sin 2t - 4e^{-\frac{8}{3}t} \ [\mathrm{A}]$$

別解：ラプラス変換

$t \geq 0$ での回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t) \quad \rightarrow \quad 3i(t) + 8\int i(t)dt = 25\sin(2t)$$

これをラプラス変換すると

$$3I(s) + \frac{8}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{25\cdot 2}{s^2+2^2} \quad \rightarrow \quad 3I(s) + \frac{8}{s}I(s) = \frac{25\cdot 2}{s^2+2^2}$$

したがって

$$I(s) = \frac{50s}{(3s+8)(s^2+4)} = \frac{K_1 s + 2K_2}{s^2+4} + \frac{K_3}{s+\frac{8}{3}} = \frac{(3K_1+3K_3)s^2 + (8K_1+6K_2)s + (16K_2+12K_3)}{(3s+8)(s^2+4)}$$

として，K_1，K_2，K_3 を求めると

$$\begin{aligned} &3K_1 + 3K_3 = 0 \\ &8K_1 + 6K_2 = 50 \quad \rightarrow \quad K_1 = 4,\ \ K_2 = 3,\ \ K_3 = -4 \\ &16K_2 + 12K_3 = 0 \end{aligned}$$

以上より，$i(t)$ は $I(s)$ のラプラス逆変換として，以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i(t) &= K_1\cos 2t + K_2\sin 2t + K_3 e^{-\frac{8}{3}t} \\ &= 4\cos 2t + 3\sin 2t - 4e^{-\frac{8}{3}t} \ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

3. (a) $i(0)$，$q(0)$ は

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1+R_2} = 5\ \mathrm{A} \\ q(0) &= C\cdot\frac{R_2 E}{R_1+R_2} = 2\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

(b) $t \geq 0$ での回路方程式は，$i(t) = dq(t)/dt$ を考慮して

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{dq^2(t)}{dt} + R_1\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

$$\frac{dq^2(t)}{dt} + 12\frac{dq(t)}{dt} + 20q(t) = 100$$

上式の定常解は

$$\frac{dq_s^2(t)}{dt^2} + 12\frac{dq_s(t)}{dt} + 20q_s(t) = 100 \quad \rightarrow \quad 20q_s(t) = 100 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 5$$

過渡解は，$q_t(t) = Ae^{mt}$ の解を仮定して

$$\frac{dq_t^2(t)}{dt} + 12\frac{dq_t(t)}{dt} + 20q_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (m^2+12m+20)q_t(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad (m+2)(m+10) = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-10t}$$

したがって，一般解 $q(t)$，$i(t)$ は

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s(t) + q_t(t) = 5 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-10t} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 10A_2 e^{-10t} \end{aligned}$$

ここで $t = 0$ での初期条件を考慮すると

$$\begin{aligned} &5 + A_1 + A_2 = 2 \\ &-2A_1 - 10A_2 = 5 \quad \rightarrow \quad A_1 = -\frac{25}{8},\ \ A_2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まるので，$i(t)$，$q(t)$ は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \; = 5 - \frac{25}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-10t} \text{ [C]} \\
i(t) &= \frac{25}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-10t} \text{ [A]}
\end{aligned}
$$

(c) $t \geq 0$ での回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + \frac{1)}{C}\int i(t)dt = E \qquad \rightarrow \qquad \frac{di(t)}{dt} + 12i(t) + 20\int i(t)dt = 100$$

上式をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&\{sI(s) - i(0)\} + 12I(s) + \frac{20}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{100}{s} \\
&sI(s) - 5 + 12I(s) + \frac{20}{s}I(s) + \frac{40}{s} = \frac{100}{s}
\end{aligned}
$$

これを $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{5s + 60}{s^2 + 12s + 20} = \frac{5s + 60}{(s+2)(s+10)} = \frac{\frac{25}{4}}{s+2} + \frac{-\frac{5}{4}}{s+10}$$

求める電流 $i(t)$ は $I(s)$ をラプラス逆変換して

$$i(t) = \frac{25}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-10t} \text{ [A]}$$

また，電荷 $q(t)$ は電流 $i(t)$ を積分して

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(t)dt = 2 + \left[-\frac{25}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-10t}\right]_0^t = 5 - \frac{25}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{-10t} \text{ [C]}$$

4. (a) コイル L に流れる電流を $i(t)$，コンデンサ C_1，C_2 の電荷をそれぞれ $q_1(t)$，$q_2(t)$ とすると，$i(0) = 0$，$q_1(0) = 0$，$q_2(0) = 0$

(b) 回路の左側閉路の閉路電流を $i_1(t)$，右側の閉路の閉路電流を $i_2(t)$ とすると，閉路方程式のラプラス変換は

$$\begin{bmatrix} sL + R_1 + \frac{1}{sC} & -sL \\ -sL & sL + R_1 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

これに数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+4s+20}{s} & -s \\ -s & \frac{s^2+4s+20}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを Cramer の公式を用いて解くために，行列の行列式 Δ を求めると

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{s^2 + 4s + 20}{s}\right)^2 - (-s)^2 = \left(\frac{s^2 + 4s + 20}{s} - s\right)\left(\frac{s^2 + 4s + 20}{s} + s\right) \\
&= \frac{(4s + 20)(2s^2 + 4s + 20)}{s^2} = \frac{8(s + 5)(s^2 + 2s + 10)}{s^2}
\end{aligned}
$$

であるので，$I_2(s)$ は

$$
\begin{aligned}
I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s^2+4s+20}{s} & \frac{8}{s} \\ -s & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} &= \frac{s^2}{(s+5)(s^2+2s+10)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 2s + 10} + \frac{K_3}{s+5} \\
&= \frac{(K_1 + K_3)s^2 + (5K_1 + K_2 + 2K_3)s + (5K_2 + 10K_3)}{(s+5)(s^2+2s+10)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_1 + K_3 = 1 \\
&5K_1 + K_2 + 2K_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad K_1 = 0,\quad K_2 = -2,\quad K_3 = 1 \\
&5K_2 + 10K_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$I_2(s) = \frac{-2}{s^2 + 2s + 10} + \frac{1}{s+5} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot 3}{(s+1)^2 + 3^2} + \frac{1}{s+5}$$

$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると $i_2(t)$ は以下のように求まる

$$I_2(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t + e^{-5t}\ [\mathrm{A}]$$