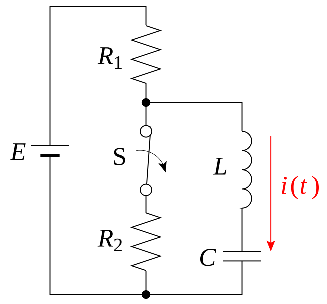
電気回路演習 第15回 (平成21年7月27日(月))

演習

　図に示す回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．その後，スイッチ S を開いた時刻を $t=0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R_1 = 3\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{2}$ H，$C = \frac{1}{4}$ F，$E = 10$ V とする．



図

(a) $i(t)$ を用いて $t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 時刻 $t=0$ における電流 $i(0)$，コンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ の値 (初期条件) を求めなさい．

(c) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とする．$I(s)$ を用いてラプラス変換された回路方程式を求めなさい．なお，初期条件も考慮すること．

(d) 電流のラプラス変換 $I(s)$ を求めなさい．

(e) 電流 $i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) コンデンサ C に蓄えられている電荷は $q(t) = \int i(t)dt$ なので回路方程式は

$$R_1 i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$3i(t) + \frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt} + 4\int i(t)dt = 10$$

$$\frac{di(t)}{dt} + 6i(t) + 8\int i(t)dt = 20$$

(b) 直流電源で定常状態なので電流は

$$i(0) = 0\ \mathrm{A}$$

また，コンデンサ C にかかる電圧 V_C は

$$V_C = \frac{R_2}{R_1+R_2}E = \frac{2}{5}\cdot 10 = 4\ \mathrm{V}$$

よって，コンデンサの電荷は

$$q(0) = CV_C = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1\ \mathrm{C}$$

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換すると

$$\{sI(s)-i(0)\}+6I(s)+8\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int i(t)dt|_{t=0}\right\}=\frac{20}{s}$$

上式に設問 (b) で求めた初期条件を代入すると

$$sI(s)+6I(s)+8\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\right\}=\frac{20}{s}$$

$$sI(s)+6I(s)+\frac{8}{s}I(s)=\frac{12}{s}$$

(d) 設問 (c) の式から

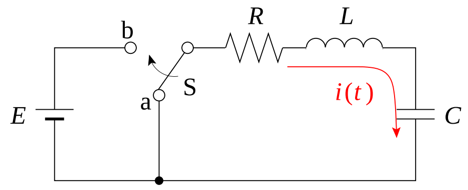
$$I(s)=\frac{\frac{12}{s}}{s+6+\frac{8}{s}}=\frac{12}{s^2+6s+8}=\frac{12}{(s+2)(s+4)}$$

(e) 設問 (d) で求めた $I(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} &= (s+2)I(s)e^{st}\big|_{s=-2}+(s+4)I(s)e^{st}\big|_{s=-4} \\ &= \left.\frac{12}{s+4}e^{st}\right|_{s=-2}+\left.\frac{12}{s+2}e^{st}\right|_{s=-4}=6e^{-2t}-6e^{-4t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

小テスト

図に示す回路においてスイッチ S が端子 a に接続された状態で十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．その後，スイッチ S を b に切り換えたとする．スイッチ S を切り換えた時刻を $t=0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R=6\ \Omega$，$L=1$ H，$C=\frac{1}{5}$ F，$E=20$ V とする．



図

(a) $i(t)$ を用いて $t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．また，時刻 $t=0$ における電流 $i(0)$，コンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ の値 (初期条件) を求めなさい．

(b) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とする．$I(s)$ を用いてラプラス変換された回路方程式を求めなさい．なお，初期条件も考慮すること．

(c) 電流のラプラス変換 $I(s)$ を求めなさい．

(d) 電流 $i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) コンデンサ C に蓄えられている電荷は $q(t)=\int i(t)dt$ なので回路方程式は

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$\frac{di(t)}{dt}+6i(t)+5\int i(t)dt=20$$

初期条件は

$$i(0)=0\ \mathrm{A}$$

$$q(0)=0\ \mathrm{C}$$

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換すると

$$\{sI(s)-i(0)\}+6I(s)+5\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{20}{s}$$

上式に初期条件を代入すると

$$sI(s)+6I(s)+\frac{5}{s}I(s)=\frac{20}{s}$$

(c) 設問 (b) の結果から

$$I(s)=\frac{\frac{20}{s}}{s+6+\frac{5}{s}}=\frac{20}{s^2+6s+5}=\frac{20}{(s+1)(s+5)}$$

(d) 設問 (c) で求めた $I(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned}i(t)=\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}&=(s+1)I(s)e^{st}\Big|_{s=-1}+(s+5)I(s)e^{st}\Big|_{s=-5}\\&=\frac{20}{s+5}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{20}{s+1}e^{st}\Big|_{s=-5}=5e^{-t}-5e^{-5t}\ [\mathrm{A}]\end{aligned}$$