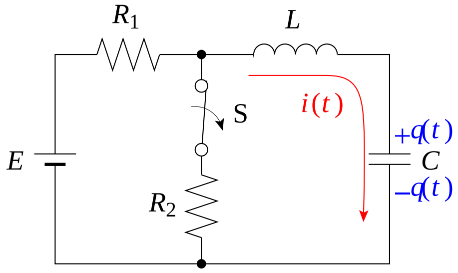
電気回路演習 第 14 回 (平成 20 年 7 月 13 日 (月))

演習

図に示す回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．その後，スイッチ S を開いた時刻を $t = 0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{2}$ H，$C = \frac{1}{4}$ F，$E = 8$ V とする．



図

(a) コンデンサ C に蓄えられる電荷を $q(t)$ とする．この $q(t)$ を用いて $0 \leq t$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t = 0$ における電荷 $q(0)$，電流 $i(0)$ の値 (初期条件) を求めなさい．

(e) 以上の結果から $0 \leq t$ における $q(t)$，$i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) キルヒホッフの電圧則より

$$R_1 i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R_1\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

与えられた値を代入すると

$$\frac{1}{2}\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 2\frac{dq(t)}{dt} + 4q(t) = 8$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 4\frac{dq(t)}{dt} + 8q(t) = 16$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + 4\frac{dq_s(t)}{dt} + 8q_s(t) = 16$$

さらに直流電源であることから $d/dt \to 0$ を考慮すると

$$8q_s(t) = 16 \qquad \to \qquad q_s(t) = 2\ \text{C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2}+4\frac{dq_t(t)}{dt}+8q_t(t)=0$$

解を $q_t(t)=Ae^{mt}$ と仮定し，上式に代入すると，特性方程式は

$$m^2+4m+8=0$$

となり，根は

$$m=-2\pm j2$$

となる．したがって過渡解 $q_t(t)$ は

$$\begin{aligned} q_t(t) &= A_1e^{(-2+j2)t}+A_2e^{(-2-j2)t} \qquad (A_1,\, A_2 \ :\ \text{積分定数}) \\ &= \left(A_1e^{j2t}+A_2e^{-j2t}\right)e^{-2t} \\ &= \left\{(A_1+A_2)\cos 2t+j(A_1-A_2)\sin 2t\right\}e^{-2t} \\ &= (B_1\cos 2t+B_2\sin 2t)\,e^{-2t}\ [\mathrm{C}] \qquad (B_1=A_1+A_2, \quad B_2=j(A_1-A_2)) \end{aligned}$$

(d) $t\leq 0$ では定常状態を仮定しているので

$$i(0)=0\ \mathrm{A}$$

また，コンデンサ C にかかる電圧 V_C は

$$V_C=\frac{R_2}{R_1+R_2}E=\frac{2}{2+2}\cdot 8=4\ \mathrm{V}$$

よって，コンデンサ C に蓄えられる電荷は

$$q(0)=CV_C=\frac{1}{4}\cdot 4=1\ \mathrm{C}$$

(e) 一般解 $q(t)$ は

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=2+(B_1\cos 2t+B_2\sin 2t)\,e^{-2t}$$

$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt}=2\left(-B_1\sin 2t+B_2\cos 2t\right)e^{-2t}-2\left(B_1\cos 2t+B_2\sin 2t\right)e^{-2t} \\ &= 2e^{-2t}\left\{(B_2-B_1)\cos 2t-(B_1+B_2)\sin 2t\right\} \end{aligned}$$

設問 (d) で求めた初期条件を用いると

$$\begin{aligned} q(0) &= 2+B_1=1 \quad \rightarrow \quad B_1=-1 \\ i(0) &= 2(B_2-B_1)=0 \quad \rightarrow \quad B_2=B_1=-1 \end{aligned}$$

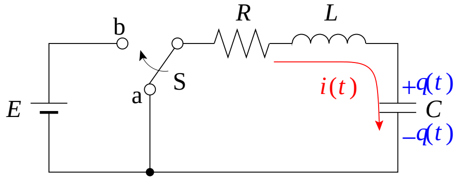
よって

$$q(t)=2-(\cos 2t+\sin 2t)\,e^{-2t}\ [\mathrm{C}]$$

$$i(t)=4e^{-2t}\sin 2t\ [\mathrm{A}]$$

小テスト

図に示す回路においてスイッチ S が端子 a に接続された状態で十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．その後，スイッチ S を b に切り換えたとする．スイッチ S を切り換えた時刻を $t = 0$ として，以下の設問に答えなさい．なお，$R = 6\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = \frac{1}{5}$ F，$E = 20$ V とする．



図

(a) コンデンサ C に蓄えられる電荷の時間変化を $q(t)$ とする．この $q(t)$ を用いて $0 \leq t$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t = 0$ における電荷 $q(0)$，電流 $i(0)$ の値 (初期条件) を求めなさい．

(e) 以上の設問の結果から $0 \leq t$ における $q(t)$，$i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) キルヒホッフの電圧則より

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

与えられた値を代入すると

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + 5q(t) = 20$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_s(t)}{dt} + 5q_s(t) = 20$$

さらに直流電源であることから $d/dt \to 0$ を考慮すると

$$5q_s(t) = 20 \qquad \to \qquad q_s(t) = 4 \text{ C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_t(t)}{dt} + 5q_t(t) = 0$$

解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定し，上式に代入すると，特性方程式は

$$m^2 + 6m + 5 = 0$$

となり，根は

$$m = -1, \ -5$$

となる．したがって過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) \quad = \quad A_1e^{-t} + A_2e^{-5t} \qquad (A_1, A_2\ :\ \text{積分定数})$$

(d) $t \leq 0$ では定常状態を仮定しているので

$$i(0) = 0 \text{ A}$$

$$q(0) = 0 \text{ C}$$

(e) 一般解 $q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 4 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-5t}$$

また，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 5A_2 e^{-5t}$$

$q(t)$，$i(t)$ の式に設問 (d) で求めた初期条件を代入すると

$$\begin{aligned} q(0) &= 4 + A_1 + A_2 = 0 \\ i(0) &= -A_1 - 5A_2 = 0 \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$A_1 = -5, \quad A_2 = 1$$

よって

$$\begin{aligned} q(t) &= 4 - 5e^{-t} + e^{-5t} \text{ [C]} \\ i(t) &= 5e^{-t} - 5e^{-5t} \text{ [A]} \end{aligned}$$