電気回路演習 第13回 (平成20年7月06日(月))

演習

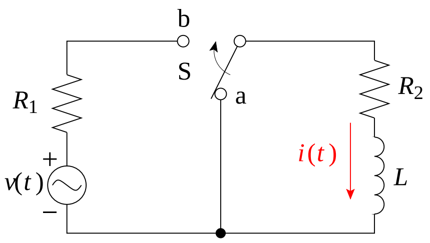
図の回路においてスイッチSを端子a側に接続して十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．いま，時刻 $t=0$ でスイッチSを端子b側に切り替えたとする．以下の設問に答えなさい．なお，交流電源は $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$ とする．

(a) 時刻 $t\geq 0$ での回路方程式を求めなさい．

(b) 過渡解 $i_t(t)$ を求めなさい．

(c) 定常解 $i_s(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t\geq 0$ で回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．



図

演習解答

(a) キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように書ける．

$$L\frac{di(t)}{dt}+(R_1+R_2)i(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

(b) 過渡解 $i_t(t)$ に対する方程式は

$$L\frac{di_t(t)}{dt}+(R_1+R_2)i_t(t)=0$$

上式に対する解は

$$i_t(t)=Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\qquad (A\ :\ \text{積分定数})$$

(c) 定常解 $i_s(t)$ に対する方程式は

$$L\frac{di_s(t)}{dt}+(R_1+R_2)i_s(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

定常解については交流理論を用いて回路方程式を書くと，複素電流振幅を I_s，$d/dt\to j\omega$ として

$$j\omega LI_s+(R_1+R_2)I_s=V_me^{j\theta}$$

上式を I_s について解くと

$$I_s=\frac{V_me^{j\theta}}{R_1+R_2+j\omega L}=V_me^{j\theta}\frac{e^{-j\phi}}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}}=\frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}}e^{j(\theta-\phi)}$$

$$\left(\phi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2}\right)$$

さらに I_s に $e^{j\omega t}$ を乗じ，虚部を取ることで時間関数に直すと，$i_s(t)$ は

$$i_s(t)=\mathrm{Im}\left\{\frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}}e^{j\omega t}\cdot e^{j(\theta-\phi)}\right\}=\frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi)$$

(d) 電流 $i(t)$ は設問 (b)，(c) の結果から

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) + Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

ここで $t = 0$ における初期条件は $i(0) = 0$ なので，上式は

$$i(0) = \frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\theta - \phi) + A = 0$$
$$A = -\frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\theta - \phi)$$

よって電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \theta - \phi) - \sin(\theta - \phi) e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \right\}$$
$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R_1 + R_2}$$

小テスト

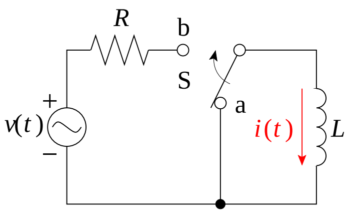
図の回路においてスイッチ S を端子 a 側に接続して十分な時間が経過し，定常状態にあるとする．いま，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を端子 b 側に切り替えたとする．以下の設問に答えなさい．なお，$R = 10\ \Omega$，$L = 0.5$ H，交流電源は $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ として，$V_m = 100$ V，$\omega = 20$ rad/s，$\theta = 0$，時間 t の単位は秒とする．また，必要であれば $(1 - j) = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ を使用しても良い．

(a) 時刻 $t \geq 0$ での回路方程式を求めなさい．

(b) 過渡解 $i_t(t)$ を求めなさい．

(c) 定常解 $i_s(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t \geq 0$ で回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．



図

小テスト解答

(a) キルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように書ける．

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$$

これに数値を代入すると以下の式を得る．

$$\frac{1}{2}\frac{di(t)}{dt} + 10i(t) = 100\sin(20t)$$

(b) 過渡解 $i_t(t)$ に対する方程式は

$$\frac{1}{2}\frac{di_t(t)}{dt} + 10i_t(t) = 0$$

上式に対する解は

$$i_t(t) = Ae^{-20t}\ [\mathrm{A}] \qquad (A\ :\ \text{積分定数})$$

(c) 定常解 $i_s(t)$ に対する方程式は

$$\frac{1}{2}\frac{di_s(t)}{dt} + 10i_s(t) = 100\sin(20t)$$

定常解については交流理論を用いて回路方程式を書くと，複素電流振幅を I_s，$d/dt \to j20$ として

$$j20 \cdot \frac{1}{2}I_s + 10I_s = 100$$

上式を I_s について解くと

$$I_s = \frac{100}{10 + j10} = 5(1 - j) = 5\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

さらに I_s に $e^{j20t} = \cos(20t) + j\sin(20t)$ を乗じ，虚部を取ることで時間関数に直すと，$i_s(t)$ は

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{5(1 - j)\left[\cos(20t) + j\sin(20t)\right]\right\} = 5\sin(20t) - 5\cos(20t) = 5\sqrt{2}\sin\left(20t - \frac{\pi}{4}\right)\ [\mathrm{A}]$$

(d) 電流 $i(t)$ は設問 (b)，(c) の結果から

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = 5\sin(20t) - 5\cos(20t) + Ae^{-20t}$$

ここで $t = 0$ における初期条件は $i(0) = 0$ なので，上式は

$$i(0) = 5 - A = 0$$
$$A = 5$$

よって電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= 5\sin(20t) - 5\cos(20t) + 5e^{-20t} \ [\mathrm{A}] \\ &= 5\sqrt{2}\sin\left(20t - \frac{\pi}{4}\right) + 5e^{-20t} \ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

参考までに，この場合の $i(t)$，$i_s(t)$，$i_t(t)$ は以下のようになる．