電気回路演習 第12回 (平成20年6月29日(木))

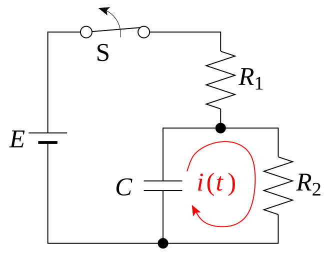
演習

図に示す回路は，スイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過して定常状態であるとする．いま，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開いたとする．以下の設問に答えなさい．

(a) スイッチ S を開く直前 $(t<0)$ においてコンデンサ C に蓄えられている電荷 Q を求めなさい．

(b) スイッチ S を開いた後 $(t\geq 0)$，コンデンサ C に蓄えられている電荷を $q(t)$ とする．$q(t)$ を用いて，時刻 $t\geq 0$ での回路方程式を示しなさい．

(c) 設問 (b) で得られた式を用いて，抵抗 R_2 に流れる電流 $i(t)$ と時定数 τ を求めなさい．また， $t\geq 0$ での電流 $i(t)$ の時間変化を図示しなさい．



図

演習解答

(a) 時刻 $t<0$ でコンデンサ C にかかる電圧 V_C は

$$V_C=\frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

よって，コンデンサ C に蓄えられる電荷 Q は

$$Q=CV_C=\frac{R_2CE}{R_1+R_2}$$

(b) $t\geq 0$ での回路方程式は $q(t)$，$i(t)$ を用いて

$$R_2 i(t)=\frac{q(t)}{C}$$

であり，$i(t)=-\dfrac{dq(t)}{dt}$ なる関係式より

$$R_2\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=0$$

(c) 設問 (b) の式の定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ

$$\text{定常解}\qquad \frac{q_s(t)}{C}=0 \quad\rightarrow\quad q_s(t)=0$$

$$\text{過渡解}\qquad R_2\frac{dq_t(t)}{dt}+\frac{q_t(t)}{C}=0 \quad\rightarrow\quad q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{CR_2}} \qquad (A:\text{は積分定数})$$

従って，一般解 $q(t)$ は

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{CR_2}}$$

$t=0$ での初期条件 (設問 (a) の結果) より，積分定数 A は

$$q(0)=A=\frac{R_2CE}{R_1+R_2}$$

以上より，電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{R_2 CE}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{CR_2}}$$

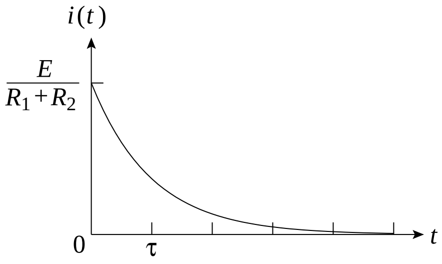
となり，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{R_2 CE}{R_1 + R_2} \cdot \left(-\frac{1}{CR_2}\right) e^{-\frac{t}{CR_2}} = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{CR_2}}$$

時定数 τ は

$$\tau = CR_2$$

となる.



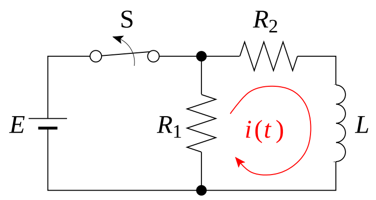
小テスト

図に示す回路はスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過して定常状態にあるとする．いま，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開いたとする．以下の設問に答えなさい．

(a) スイッチ S を開く直前 ($t < 0$) において，インタクタ L に流れる電流 I を求めなさい．

(b) スイッチ S を開いた後 ($t \geq 0$)，インダクタ L に流れる電流を $i(t)$ とする．$i(t)$ を用いて $t \geq 0$ での回路方程式を示しなさい．

(c) 設問 (b) で得られた式を用いて，インダクタ L に流れる電流 $i(t)$ と時定数 τ を求めなさい．また $t \geq 0$ での電流 $i(t)$ の時間変化を図示しなさい．



図

小テスト解答

(a)

$$I = \frac{E}{R_2}$$

(b) $t \geq 0$ での回路方程式は $i(t)$ を用いて

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = 0$$

(c) 設問 (b) の式の定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ

$$\begin{array}{lll}
\text{定常解} & (R_1 + R_2)i_s(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_s(t) = 0 & \\
\text{過渡解} & L\dfrac{di_t(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} & (A: \text{は積分定数})
\end{array}$$

従って，一般解 $i(t)$ は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

$t = 0$ での初期条件 (設問 (a) の結果) より，積分定数 A は

$$i(0) = A = \frac{E}{R_2}$$

以上より，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{E}{R_2}e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

時定数 τ は

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$