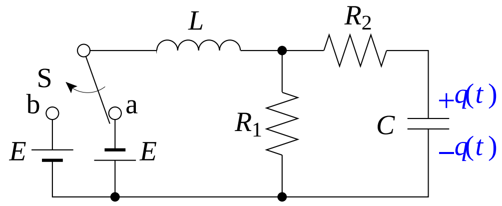
電気回路 I 第 14 回 宿題

宿題

定常状態にある下図の回路が，時刻 $t=0$ 　でスイッチ S が a 側から b 側に切り替わるとき，$t \geq 0$ において各抵抗に流れる電流 $i_{R1}(t)$，$i_{R2}(t)$ およびコンデンサ C に蓄えられている電荷の時間変化 $q(t)$ を求めよ．ただし，$R_1 = R_2 = 6\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = \frac{1}{6}$ F，$E = 12$ V とする．

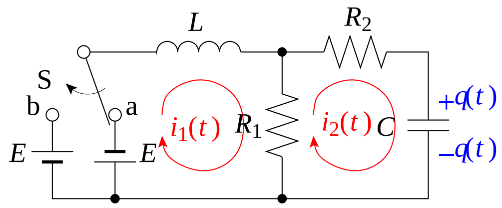


解答

$t=0$ でコイル L に流れている電流 I_0 とコンデンサ C に蓄えられている電荷 Q_0 は

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{-E}{R_1} = -2\ \mathrm{A} \\
Q_0 &= C \cdot (R_1 I_0) = -CE = -2\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

下図のように閉路電流を設定する．



このとき回路方程式は以下のように書ける．

$$
L\frac{di_1(t)}{dt} + R_1\{i_1(t) - i_2(t)\} = E
$$

$$
R_1\{i_2(t) - i_1(t)\} + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt = 0
$$

ここで，$i_1(t)$，$i_2(t)$ のラプラス変換を $I_1(s)$，$I_2(s)$ として上式をラプラス変換すると

$$
L\{sI_1(s) - i_1(0)\} + R_1\{I_1(s) - I_2(s)\} = \frac{E}{s}
$$

$$
R_1\{I_2(s) - I_1(s)\} + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I_2(s) + \int i_2(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = 0
$$

さらに $i_1(0) = I_0$，$\int i_2(t)dt\big|_{t=0} = Q_0$ を考慮して，上式を行列の形にまとまると

$$
\begin{bmatrix} sL + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & (R_1 + R_2) + \dfrac{1}{sC} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{E}{s} + LI_0 \\ -\dfrac{Q_0}{sC} \end{bmatrix}
$$

これに数値を代入すると

$$
\begin{bmatrix} s+6 & -6 \\ -6 & \dfrac{6(2s+1)}{s} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -\dfrac{2(s-6)}{s} \\ \dfrac{12}{s} \end{bmatrix}
$$

上式の左辺行列の行列式 Δ は

$$
\Delta = (s+6)\frac{6(2s+1)}{s} - (-6)^2 = \frac{6(2s^2+13s+6)}{s} - \frac{6\cdot 6s}{s} = \frac{6(2s^2 7s + 7s + 6)}{s} = \frac{6(s+2)(2s+3)}{s}
$$

Cramer の公式を用いて $I_1(s)$，$I_2(s)$ を求めると

$$
\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{2(s-6)}{s} & -6 \\ \dfrac{12}{s} & \dfrac{6(2s+1)}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \left\{-12 \cdot \frac{(s-6))(2s+1)}{s^2} + 6 \cdot \frac{12}{s}\right\} \cdot \frac{s}{6(s+2)(2s+3)} \\
&= -2 \cdot \frac{2s^2 - 12s + s - 6 - 6s}{s(s+2)(2s+3)} = \frac{-2s^2 + 17s + 6}{s(s+2)\left(s+\frac{3}{2}\right)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+\frac{3}{2}} \\
&\qquad K_1 = sI_1(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{-2s^2+17s+6}{(s+2)\left(s+\frac{3}{2}\right)}\right|_{s=0} = \frac{6}{3} = 2 \\
&\qquad K_2 = (s+2)I_1(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{-2s^2+17s+6}{s\left(s+\frac{3}{2}\right)}\right|_{s=-2} = \frac{-8-34+6}{-2\cdot\frac{-1}{2}} = -36 \\
&\qquad K_2 = \left(s+\frac{3}{2}\right) I_1(s)\bigg|_{s=-\frac{3}{2}} = \left.\frac{-2s^2+17s+6}{s(s+2)}\right|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}-\frac{51}{2}+6}{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 32 \\
&= \frac{2}{s} + \frac{-36}{s+2} + \frac{32}{s+\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s+6 & -\dfrac{2(s-6)}{s} \\ -6 & \dfrac{12}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \left\{12 \cdot \frac{s+6}{s} - 12 \cdot \frac{s-6}{s}\right\} \cdot \frac{s}{6(s+2)(2s+3)} \\
&= \frac{24}{(s+2)(2s+3)} = \frac{12}{(s+2)\left(s+\frac{3}{2}\right)} = \frac{L_2}{s+2} + \frac{L_3}{s+\frac{3}{2}} \\
&\qquad L_2 = (s+2)I_2(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{12}{\left(s+\frac{3}{2}\right)}\right|_{s=-2} = \frac{12}{\frac{-1}{2}} = -24 \\
&\qquad L_3 = \left(s+\frac{3}{2}\right) I(s)\bigg|_{s=-\frac{3}{2}} = \left.\frac{12}{(s+2)}\right|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24 \\
&= \frac{-24}{s+2} + \frac{24}{s+\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_1(s)\right\} = 2 - 36e^{-2t} + 32e^{-1.5t} \text{ [A]} \\
i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{I_2(s)\right\} = -24\left(e^{-2t} - e^{-1.5t}\right) \text{ [A]}
\end{aligned}
$$

以上より，抵抗 R_1，R_2 に流れる電流は

$$
\begin{aligned}
i_{R1}(t) &= i_1(t) - i_2(t) = 2 - 12e^{-2t} + 8e^{-1.5t} \text{ [A]} \\
i_{R2}(t) &= i_2(t) = -24\left(e^{-2t} - e^{-1.5t}\right) \text{ [A]}
\end{aligned}
$$

コンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ は

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0) + \int_0^t i_2(t)dt = -2 - \int_0^t 24\left(e^{-2t} - e^{-1.5t}\right)dt \\
&= -2 - 24\left[\frac{e^{-2t}}{-2} - \frac{e^{-1.5t}}{-1.5}\right]_0^t = -2 + 4\left[3e^{-2t} - 4e^{-1.5t}\right]_0^t \\
&= -2 + 12e^{-2t} - 16e^{-1.5t} - 12 + 16 \\
&= 2 + 12e^{-2t} - 16e^{-1.5t} \text{ [C]}
\end{aligned}
$$