電気回路 I 第 13 回 宿題

宿題

第 9 回〜11 回の宿題をラプラス変換を利用して解く．

(a) 図 9-1 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチが閉じるとき，コイル L に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

(b) 図 10-2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチが b 側に切り替わる．コンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(t)$ および流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，$R_0=10\ \Omega$，$R=20\ \Omega$，$L=3$ H，$C=\frac{1}{100}$ F，$v(t)=125\sin(5t)$ V，$E=50$ V，時間 t の単位は秒とする．

(c) 図 11 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチ S が開くものとする．$t\geq 0$ での電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，$E=60$ V，$R_1=10\ \Omega$，$R_2=20\ \Omega$，$R_3=30\ \Omega$，$L=10$ とし，$C=\frac{1}{40}$ F とする．

(d) (c) の問題で $C=\frac{1}{30}$ F としたときの $i(t)$，$q(t)$ を求めよ．

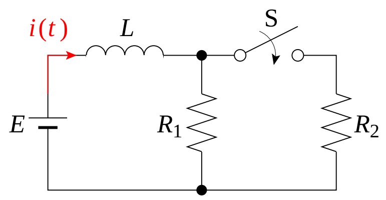

図 9-1

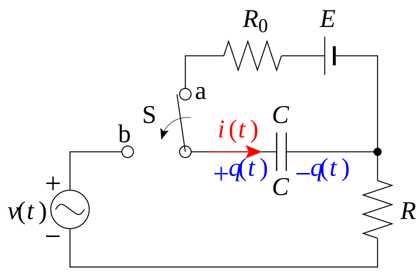

図 10-2

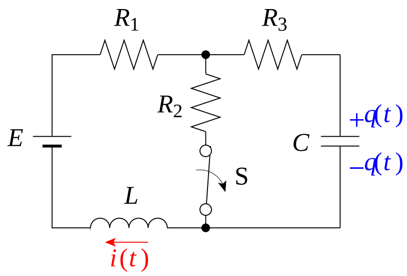

図 11

解答

(a) 回路方程式および初期条件は以下のように与えられている (過去の宿題参照)

$$\text{回路方程式}\qquad L\frac{di(t)}{dt}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i(t)=E$$

$$\text{初期条件}\qquad i(0)=\frac{E}{R_1}$$

回路方程式をラプラス変換すると

$$L\left\{sI(s)-i(0)\right\}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I(s)=\frac{E}{s}\qquad\rightarrow\qquad L\left\{sI(s)-\frac{E}{R_1}\right\}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I(s)=\frac{E}{s}$$

$I(s)$ について解くと

$$\left(Ls+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)I(s)=\frac{(Ls+R_1)E}{R_1s}$$

$$I(s)=\frac{(Ls+R_1)E}{R_1Ls\left(s+\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\right)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}}$$

ここで，K_1，K_2 は

$$K_1=sI(s)|_{s=0}=\left.\frac{(Ls+R_1)E}{R_1L\left(s+\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\right)}\right|_{s=0}=\frac{R_1E}{R_1L\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E$$

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \left(s+\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\right)I(s)\bigg|_{s=-\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}} = \frac{(Ls+R_1)E}{R_1Ls}\bigg|_{s=-\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}} \\
&= \frac{\left(-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_1\right)E}{-\frac{R_1^2R_2}{R_1+R_2}} = \frac{R_1^2E}{-R_1^2R_2} = -\frac{E}{R_2}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=K_1+K_2e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}t}=\frac{(R_1+R_2)E}{R_1R_2}-\frac{E}{R_2}e^{-\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}t}
$$

(b) 回路方程式および初期条件は以下のように与えられている (過去の宿題参照)

$$
\begin{aligned}
&\text{回路方程式} \quad Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=v(t) \quad \rightarrow \quad 20i(t)+100\int i(t)dt=125\sin(5t) \\
&\text{初期条件} \quad q(0)=\frac{1}{2}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

回路方程式をラプラス変換すると

$$
20I(s)+100\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+q(0)\right\}=\frac{125\cdot 5}{s^2+5^2} \quad \rightarrow \quad 20I(s)+100\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{125\cdot 5}{s^2+5^2}
$$

$I(s)$ について解くと

$$
20(s+5)I(s)=\frac{125\cdot 5s}{s^2+5^2}-50
$$

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \frac{125s}{4(s+5)(s^2+5^2)}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+5}=\frac{K_1s+K_2\cdot 5}{s^2+5^2}+\frac{K_3}{s+5}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+5} \\
&= \frac{(K_1+K_3)s^2+5(K_1+K_2)s+25(K_2+K_3)}{s^2+5^2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+5}
\end{aligned}
$$

ここで，K_1，K_2，K_3 は係数比較により

$$
\begin{aligned}
&s^2\text{の係数} \quad K_1+K_3=0 \\
&s\ \text{の係数} \quad 5(K_1+K_2)=\frac{125}{4} \quad \rightarrow \quad K_1=K_2=\frac{25}{8}, \quad K_3=-\frac{25}{8} \\
&1\ \text{の係数} \quad 25(K_2+K_3)=0
\end{aligned}
$$

以上より

$$
i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=K_1\cos 5t+K_2\sin 5t+K_3e^{-5t}-\frac{5}{2}e^{-5t}=\frac{25}{8}\left(\cos 5t+\sin 5t\right)-\frac{45}{8}e^{-5t}\ [\mathrm{A}]
$$

また，電荷 $q(t)$ は時刻 $t=0$ での電荷に，$t\geq 0$ で運ばれた電荷を足すことで

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0)+\int_0^t i(t)dt=\frac{1}{2}+\left[\frac{5}{8}\left(\sin 5t-\cos 5t\right)+\frac{9}{8}e^{-5t}\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}+\left\{\frac{5}{8}\left(\sin 5t-\cos 5t\right)+\frac{9}{8}e^{-5t}\right\}-\left\{-\frac{5}{8}+\frac{9}{8}\right\} \\
&= \frac{5}{8}\left(\sin 5t-\cos 5t\right)+\frac{9}{8}e^{-5t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}
$$

(c) 回路方程式および初期条件は以下のように与えられている (過去の宿題参照)

$$
\begin{aligned}
&\text{回路方程式} \quad L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E \quad \rightarrow \quad 10\frac{di(t)}{dt}+40i(t)+40\int i(t)dt=60 \\
&\text{初期条件} \quad q(0)=1\ \mathrm{C}, \quad i(0)=2\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

回路方程式をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&10\left\{sI(s)-i(0)\right\}+40I(s)+40\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+q(0)\right\}=\frac{60}{s}\\
&\qquad\rightarrow\qquad 10\left\{sI(s)-2)\right\}+40I(s)+40\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+1\right\}=\frac{60}{s}
\end{aligned}
$$

$I(s)$ について解くと

$$(s^2+4s+4)I(s)=2s+2$$

$$I(s) \quad = \quad \frac{2s+2}{(s+2)^2}=\frac{2(s+2)-2}{(s+2)^2}=\frac{2}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2}$$

以上より

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}2e^{-2t}-2te^{-2t}=2(1-t)e^{-2t}\ [\mathrm{A}]$$

また，電荷 $q(t)$ は時刻 $t=0$ での電荷に，$t\geq 0$ で運ばれた電荷を足すことで

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0)+\int_0^t i(t)dt=1+\int_0^t 2(1-t)e^{-2t}dt\\
&= 1+\left[-(1-t)e^{-2t}\right]_0^t-\int_0^t e^{-2t}dt=1-(1-t)e^{-2t}+1+\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^t\\
&= 2-(1-t)e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}\\
&= \frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}-t\right)e^{-2t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}
$$

(d) 回路方程式および初期条件は以下のように与えられている (過去の宿題参照)

$$
\begin{aligned}
&\text{回路方程式} \qquad L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E \qquad\rightarrow\qquad 10\frac{di(t)}{dt}+40i(t)+30\int i(t)dt=60\\
&\text{初期条件} \qquad q(0)=\frac{4}{3}\ \mathrm{C},\quad i(0)=2\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

回路方程式をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&10\left\{sI(s)-i(0)\right\}+40I(s)+30\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+q(0)\right\}=\frac{60}{s}\\
&\qquad\rightarrow\qquad 10\left\{sI(s)-2)\right\}+40I(s)+30\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+\frac{4}{3}\right\}=\frac{60}{s}
\end{aligned}
$$

$I(s)$ について解くと

$$(s^2+4s+3)I(s)=2s+2$$

$$I(s) \quad = \quad \frac{2s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{2}{s+3}$$

以上より

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=2e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

また，電荷 $q(t)$ は時刻 $t=0$ での電荷に，$t\geq 0$ で運ばれた電荷を足すことで

$$
\begin{aligned}
q(t) &= q(0)+\int_0^t i(t)dt=\frac{4}{3}+\int_0^t 2e^{-3t}dt=\frac{4}{3}+\left[-\frac{2}{3}e^{-3t}\right]_0^t=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t}+\frac{2}{3}\\
&= 2-\frac{2}{3}e^{-3t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}
$$