H21 年度電気回路 I 宿題 (第 12 回)

課題

1. 以下の関数をラプラス変換の定義

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

に従ってラプラス変換せよ．ただし，$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ とし，$a > 0$，n は整数とする．

$$\frac{di(t)}{dt}, \qquad \int i(t)dt, \qquad \sin(\omega t + \theta), \qquad u(t-a), \qquad e^{-at}$$

2. 推移定理 (周波数領域) を証明し，以下の関数を上の結果と推移定理を用いてラプラス変換せよ．

$$e^{-4t}\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

3. 以下の関数をラプラス逆変換せよ．

$$\frac{-11s - 13}{(s+3)(s^2+4s+13)}, \qquad \frac{s(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}$$

解答

1. (a) 部分積分を利用して解く

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty i(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= \{0 - i(0)\} + s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = -i(0) + sI(s) \\
&= sI(s) - i(0)
\end{aligned}$$

(b) $i(t) = \frac{df(t)}{dt}$ と置いて，(a) の結果を利用する．

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + f(0)\right)$$

ここで，$f(t) = \int i(t)dt$ であるので

$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\} = F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + \int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right)$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin\omega t + \theta\} &= \int_0^\infty \sin(\omega t + \theta)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j(\omega t+\theta)} - e^{-j(\omega t+\theta)}}{j2}\cdot e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}e^{j\theta} - e^{-(s+j\omega)t}e^{-j\theta}}{j2}dt = \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}e^{j\theta}}{-(s-j\omega)} - \frac{e^{-(s+j\omega)t}e^{-j\theta}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{j\theta}}{s-j\omega} - \frac{e^{-j\theta}}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{j2}\cdot\frac{s(e^{j\theta} - e^{j\theta}) + j\omega(e^{j\theta} + e^{j\theta})}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{s\sin\theta + \omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(d) $u(t-a)$ は $t \geq a$ で値が 1，$t < a$ で値が 0 であるので

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

(e)

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

2. 推移定理は以下のように導ける

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-bt}f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+b)t}dt$$

$s+b=s'$ と置き，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s't}dt = F(s') = F(s+b)$$

(a) $f(t)$ を以下のように置く

$$f(t) = \sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は，1 の結果より

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{s\sin\frac{\pi}{3}+3\cos\frac{\pi}{3}}{s^2+3^2} = \frac{\sqrt{3}s+3}{2(s^2+9)}$$

ここで，推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}f(t)\right\} = F(s+4) = \frac{\sqrt{3}(s+4)+3}{2((s+4)^2+9)} = \frac{\sqrt{3}s+(3+4\sqrt{3})}{2(s^2+8s+25)}$$

3. (a) 以下のように式変形をする

$$\begin{aligned}\frac{-11s-13}{(s+3)(s^2+4s+13)} &= \frac{-11s-13}{(s+3)\{(s+2)^2+3^2\}} = \frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2(s+2)+3K_3}{(s+2)^2+3^2} \\ &= \frac{K_1(s_2+4s+13)+K_2(s+2)(s+3)+3K_3(s+3)}{(s+3)(s^2+4s+13)} \\ &= \frac{(K_1+K_2)s^2+(4K_1+5K_2+3K_3)s+(13K_1+6K_2+9K_3)}{(s+3)(s^2+4s+13)}\end{aligned}$$

係数比較により K_1，K_2，K_3 は

$$\begin{cases} K_1+K_2=0 \\ 4K_1+5K_2+3K_3=-11 \\ 13K_1+6K_2+9K_3=-13 \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1=2,\quad K_2=-2 \quad K_3=-3$$

であるので，ラプラス変換表と推移定理を利用して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-11s-13}{(s+3)(s^2+4s+13)}\right\} &= K_1e^{^3t}+(K_2\cos 3t+K_3\sin 3t)\,e^{-2t} \\ &= 2e^{-3t}-(2\cos 3t+3\sin 3t)\,e^{-2t}\end{aligned}$$

(a) の別解、与えられている式を $F(s)$ として以下のように変形する

$$F(s) = \frac{-11s-13}{(s+3)(s^2+4s+13)} = \frac{-11s-13}{(s+3)(s+2-j3)(s+2+j3)} = \frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2}{s+2-j3}+\frac{K_3}{s+2+j3}$$

ここで，K_1，K_2，K_3 は

$$\begin{aligned}K_1 &= (s+3)F(s)|_{s=-3} = \left.\frac{-11s-13}{s^2+4s+13}\right|_{s=-3} = \frac{20}{10} = 2 \\ K_2 &= (s+2-j3)F(s)|_{s=-2+j3} = \left.\frac{-11s-13}{(s+3)(s+2+j3)}\right|_{s=-2+j3} = \frac{9-j33}{(1+j3)\cdot(j6)} \\ &= \frac{(1-j3)(9-j33)}{(1-j3)(1+j3)\cdot(j6)} = \frac{9-j33-j27-99}{10\cdot(j6)} = \frac{-90-j60}{j60} = \frac{-2+j3}{2} \\ K_3 &= K_2^* = \frac{-2-j3}{2}\end{aligned}$$

以上より

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-11s-13}{(s+3)(s^2+4s+13)}\right\} &= K_1e^{-3t}+K_2e^{(-2-j3)t}+K_3e^{(-2+j3)t} \\
&= 2e^{-3t}+\left\{-(e^{j3t}+e^{-j3t})+\frac{j3}{2}(e^{j3t}-e^{-j3t})\right\}e^{-2t} \\
&= 2e^{-3t}-(2\cos 3t+3\sin 3t)\,e^{-2t}
\end{aligned}
$$

(b) 以下のように式変形をする

$$
\begin{aligned}
\frac{s(s-1)}{(s+1)^2(s+3)} &= \frac{K_1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}=\frac{K_1(s+3)+K_2(s+2)(s+3)+3K_3(s+1)^2}{(s+1)^2(s+3)} \\
&= \frac{(K_2+K_3)s^2+(K_1+4K_2+2K_3)s+(3K_1+3K_2+K_3)}{(s+1)^2(s+3)}
\end{aligned}
$$

係数比較により K_1，K_2，K_3 は

$$
\left\{
\begin{array}{l}
K_2+K_3=1 \\
K_1+4K_2+2K_3=-1 \quad \rightarrow \quad K_1=1,\quad K_2=-2\quad K_3=3 \\
3K_1+3K_2+K_3=0
\end{array}
\right.
$$

であるので，ラプラス変換表と推移定理を利用して

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s(s-1)}{(s+1)^2(s+3)}\right\} &= K_1te^{-t}+K_2e^{-t}+K_3e^{-3t} \\
&= te^{-t}-2e^{-t}+3e^{-3t}
\end{aligned}
$$