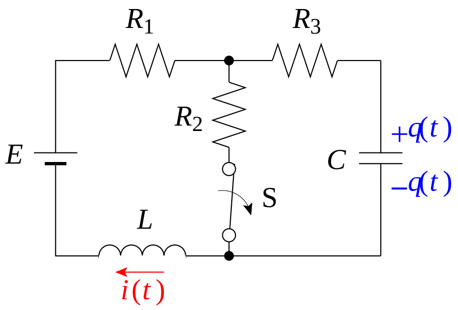
電気回路 I 第 11 回 宿題

宿題

以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が開くものとする．以下の各場合について電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，$E = 60$ V，$R_1 = 10$ Ω，$R_2 = 20$ Ω，$R_3 = 30$ Ω，$L = 10$ H，時間 t の単位は秒とする．

(a) $C = \dfrac{1}{40}$ F　　(b) $C = \dfrac{1}{30}$ F　　(c) $C = \dfrac{1}{80}$ F

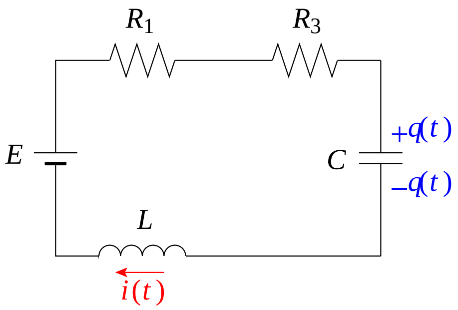


解答

まず，$t < 0$ の定常状態について考える．この場合，コンデンサには電流が流れず，コイルの抵抗は 0 になるので

$$
\begin{aligned}
i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} \\
q(0) &= C\frac{R_2 E}{R_1 + R_2}
\end{aligned}
$$

次に，$t > 0$ での解を考える．このとき以下の回路を考えれば良く



回路方程式は

$$
L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_3)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E
$$

と書くことができ，コンデンサに流れる電流と蓄えられている電荷の関係　$i(t) = dq(t)/dt$ を用いると (この向きの電流が流れると電荷が増加する)

$$
L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_3)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E
$$

を得る．$q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分け，定常解に対しては (直流電源なので) $d/dt \to 0$ であることを利用すると

$$
L\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + (R_1 + R_3)\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad q_s(t) = CE
$$

過渡解に対しては，$E \to 0$ と置いて

$$
\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + (R_1 + R_3)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0
$$

という 2 階の同次微分方程式を得るので，$q_t(t) = Ae^{mt}$ なる解を仮定し，上式に代入すると

$$\left\{ Lm^2 + (R_1 + R_3)m + \frac{1}{C} \right\} Ae^{mt} = 0$$

を得る．上式の $q_t(t) = Ae^{mt}$ は 0 ではないので，特性方程式

$$Lm^2 + (R_1 + R_3)m + \frac{1}{C} = 0$$

を解いて，m の値を計算することで，過渡解 $q_t(t)$ を求める．

(a) 初期条件は

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A} \\ q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 60}{40 \cdot 30} = 1 \text{ C} \end{aligned}$$

定常解は

$$q_s(t) = CE = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \text{ C}$$

過渡解は

$$\begin{aligned} &10(m^2 + 4m + 4) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2 \ \text{(重解)} \\ &\rightarrow \quad q_t(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 t e^{-2t} = (A_1 + A_2 t)\, e^{-2t} \text{ [C]} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{3}{2} + (A_1 + A_2 t)\, e^{-2t} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = A_2 e^{-2t} - 2(A_1 + A_2 t)e^{-2t} = \{(-2A_1 + A_2) - 2A_2 t\}\, e^{-2t} \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{3}{2} + A_1 = 1 \quad \rightarrow \quad A_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ i(0) &= -2A_1 + A_2 = 2 \quad \rightarrow \quad A_2 = 2 + 2A_1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2} + t \right) e^{-2t} \text{ [C]} \\ i(t) &= e^{-2t} - 2\left(-\frac{1}{2} + t \right) e^{-2t} = 2\,(1 - t)\, e^{-2t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

(b) 初期条件は

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A} \\ q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 60}{30 \cdot 30} = \frac{4}{3} \text{ C} \end{aligned}$$

定常解は

$$q_s(t) = CE = \frac{60}{30} = 2 \text{ C}$$

過渡解は

$$\begin{aligned} &10(m^2 + 4m + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad 10(m+1)(m+3) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1,\ -3 \\ &\rightarrow \quad q_t(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \text{ [C]} \end{aligned}$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= 2 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \\
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t}
\end{aligned}
$$

初期条件より

$$
\begin{aligned}
q(0) &= 2 + A_1 + A_2 = \frac{4}{3} \\
i(0) &= -A_1 - 3A_2 = 2
\end{aligned}
$$

この連立一次方程式を解くと，まず、辺々を足して

$$
\begin{aligned}
&2 - 2A_2 = \frac{10}{3} \quad \rightarrow \quad A_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} - 2\right) = -\frac{2}{3} \\
&A_1 = -3A_2 - 2 = 0
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= 2 - \frac{2}{3}e^{-3t} \text{ [C]} \\
i(t) &= 2e^{-3t} \text{ [A]}
\end{aligned}
$$

(c) 初期条件は

$$
\begin{aligned}
i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A} \\
q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} = \frac{60 \cdot 20}{80 \cdot 30} = \frac{1}{2} \text{ C}
\end{aligned}
$$

定常解は

$$
q_s(t) = CE = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \text{ C}
$$

過渡解は

$$
\begin{aligned}
&10(m^2 + 40m + 80) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2 \pm j2 \\
&\quad \rightarrow \quad q_t(t) = (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)\, e^{-2t} \text{ [C]}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{3}{4} + (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)\, e^{-2t} \\
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \{(-2A_1 + 2A_2)\cos 2t + (-2A_1 - 2A_2)\sin 2t\}\, e^{-2t}
\end{aligned}
$$

初期条件より

$$
\begin{aligned}
q(0) &= \frac{3}{4} + A_1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \\
i(0) &= -2A_1 + 2A_2 = 2 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{1}{2}(2 + 2A_1) = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-\cos 2t + 3\sin 2t)\, e^{-2t} \text{ [C]} \\
i(t) &= (2\cos 2t - \sin 2t)\, e^{-2t} \text{ [A]}
\end{aligned}
$$