# 電気回路 I 第 10 回 宿題

## 宿題

$R_0 = 10\ \Omega$, $R = 20\ \Omega$, $L = 3$ H, $C = \frac{1}{100}$ F, $v(t) = 125\sin(5t)$ V, $E = 50$ V とするとき，以下の問いに答えよ．

1. 図 1 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが b 側に切り替わる．コイル $L$ に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

2. 図 2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t = 0$ でスイッチが b 側に切り替わる．コンデンサ $C$ に蓄えられている電荷 $q(t)$ および流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

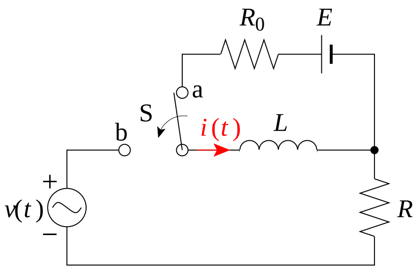



図 1

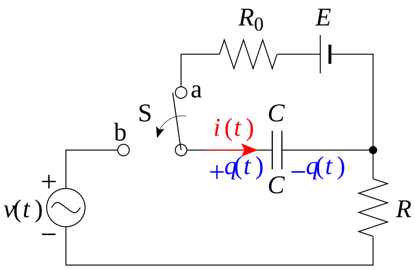



図 2

## 解答

1. (a) $t < 0$ の定常状態を考えて，$t = 0$ でコイルに流れる電流 $i(0)$ は図 3(a) の回路を考えて

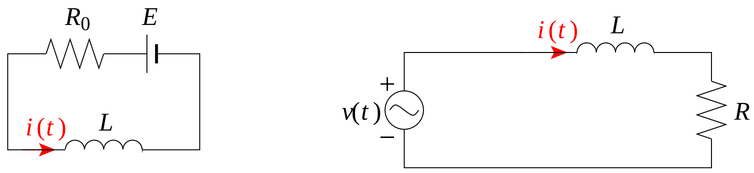
$$i(0) = \frac{E}{R_0} = \frac{50}{10} = 5\ \text{A}$$

(b) $t \to \infty$ の定常状態において，コイルに流れる電流 $i_s(t)$ は図 3(b) の回路を考えて，電圧の複素振幅を $\mathrm{V} = 125$ V，角周波数を $\omega = 5$ rad/s として，電流の複素振幅 $I_s$ は

$$I_s = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{125}{20 + j15} = \frac{25}{4 + j3} = 4 - j3\ \text{A}$$

したがって，$i_s(t)$ は

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{(4 - j3)e^{j5t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{(4 - j3)(\cos 5t + j\sin 5t)\right\} = 4\sin 5t - 3\cos 5t\ [\mathrm{A}]$$




(a) (b)

図 3

(c) $t > 0$ における回路の方程式は，は図 3(b) の回路を考えてキルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$$

である．いま，この微分方程式の解 $i(t)$ を定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ の和として $i(t) = i_s(t) + i_t(t)$ と表す．このとき，定常解 $i_s(t)$ は時間が十分経過した後の解であり既に求めてある．一方，過渡解 $i_t(t)$ に対する微分方程式は右辺の電源に関する項を 0 とおいて

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$

と書けける．上の式は一階の同次微分方程式であり，$i_t(t)$ は，積分定数を $A$ として

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{20}{3}t}\ [\mathrm{A}]$$

で与えられる．したがって，$i(t)$ は

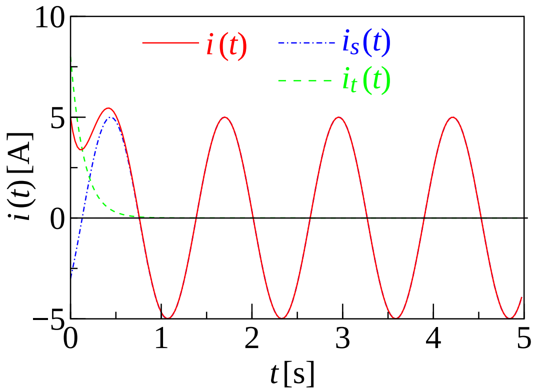
$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = 4\sin 5t - 3\cos 5t + Ae^{-\frac{20}{3}t}$$

と書ける．ここで，未知定数 $A$ を決定するために，初期条件として $t=0$ で $i(0)=5$ A であることを用いると．

$$i(0) = -3 + A = 5 \qquad \rightarrow \qquad A = 8$$

以上より，$t>0$ における電流 $i(t)$ は

$$i(t) = 4\sin 5t - 3\cos 5t + 8e^{-\frac{20}{3}t} \ [\mathrm{A}]$$




2. (a) $t<0$ の定常状態を考えて，$t=0$ でコンデンサに蓄えられている電荷 $q(0)$ は図 4(a) の回路を考え，コンデンサには電流が流れないこととコンデンサ $C$ にかかる電圧が電源電圧 $E$ と等しいことを考えて

$$q(0) \quad = \quad CE = \frac{1}{100}\cdot 50 = 0.5 \ \mathrm{C}$$

(b) $t\to\infty$ の定常状態において，コイルに流れる電流 $i_s(t)$ は図 4(b) の回路を考えて，電圧の複素振幅を $\mathrm{V}=125$ V，角周波数を $\omega=5$ rad/s として，電流の複素振幅 $I_s$ は

$$I_s = \frac{V}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{125}{20-j20} = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{1-j} = \frac{25}{8}(1+j) \ \mathrm{A}$$

したがって，定常電流 $i_s(t)$ は

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{\frac{25}{8}(1+j)e^{j5t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{25}{8}(1+j)(\cos 5t + j\sin 5t)\right\} = \frac{25}{8}(\cos 5t + \sin 5t) \ [\mathrm{A}]$$

また，コンデンサに蓄えられている電荷 $q_s(t)$ は電流 $i_s(t)$ の積分として

$$q_s(t) = \int i_s(t)dt = \frac{5}{8}(\sin 5t - \cos 5t)$$

である．

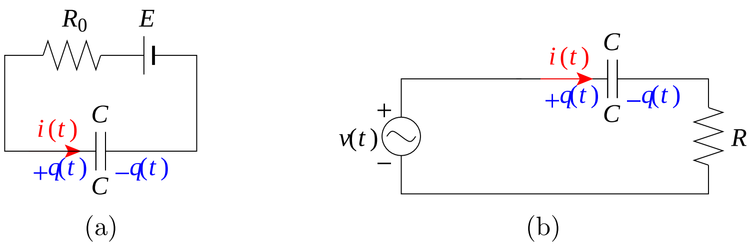



図 4

(c) $t>0$ における回路の方程式は，図 4(b) の回路を考えてキルヒホッフの電圧則より

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

であり，回路に流れる電流はコンデンサに流れる電流と等しく $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ と表せる (この向きの電流が流れると電荷が増える) ので

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

である．いま，この微分方程式の解 $q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ の和として $q(t) = q_s(t) + q_t(t)$ と表す．このとき，定常解 $q_s(t)$ は時間が十分経過した後の解でありすでに求めてある．一方，過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は右辺の電源に関する項を 0 とおいて

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

と書けける．上の式は一階の同次微分方程式であり，$q_t(t)$ は，積分定数を $A$ として

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-5t}$$

で与えられる．したがって，$q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{5}{8}(\sin 5t - \cos 5t) + Ae^{-5t}$$

と書ける．ここで，未知定数 $A$ を決定するために，初期条件として $t = 0$ で $q(0) = 0.5$ C であることを用いると．

$$q(0) = -\frac{5}{8} + A = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$$

以上より，$t > 0$ における電荷 $q(t)$ は

$$q(t) \quad = \quad \frac{5}{8}(\sin 5t - \cos 5t) + \frac{9}{8}e^{-5t} \ [\mathrm{C}]$$

また，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{25}{8}(\cos 5t + \sin 5t) - \frac{45}{8}e^{-5t} \ [\mathrm{A}]$$

であり，これらのグラフは以下のようになる．