電気回路 I 第 9 回 宿題

宿題

1. 図 1 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチが閉じるとき，コイル L に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

2. 図 2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチが開くとき，コンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(t)$ および流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

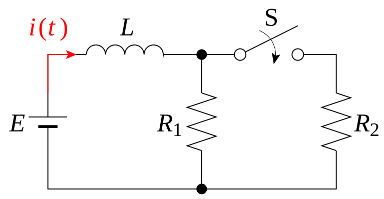


図 1

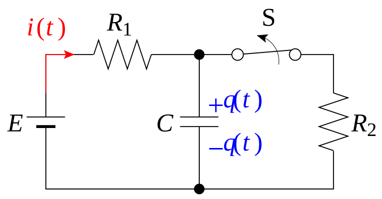


図 2

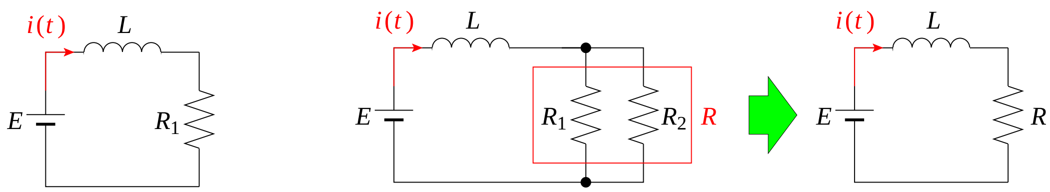
解答

1. (a) $t<0$ の定常状態において，コイルに流れる電流 I_0 は図 3(a) の回路を考えて

$$I_0 = \frac{E}{R_1}$$

(b) $t\to\infty$ の定常状態において，コイルに流れる電流 I_∞ は図 3(b) の回路を考えて

$$I_\infty = \frac{E}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E$$



(a) (b)

図 3

(c) $t>0$ における回路の方程式は，は図 3(b) の回路を考えてキルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

である．いま，この微分方程式の解 $i(t)$ を定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ の和として $i(t)=i_s(t)+i_t(t)$ と表す．このとき，定常解 $i_s(t)$ は時間が十分経過した後の解であり

$$i_s(t) = I_\infty = \frac{E}{R} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E$$

である．一方，過渡解 $i_t(t)$ に対する微分方程式は右辺の電源に関する項を 0 とおいて

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0$$

と書けける．上の式は一階の同時微分方程式であり，$i_t(t)$ は，積分定数を A として

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

で与えられる．したがって，$i(t)$ は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E + Ae^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}$$

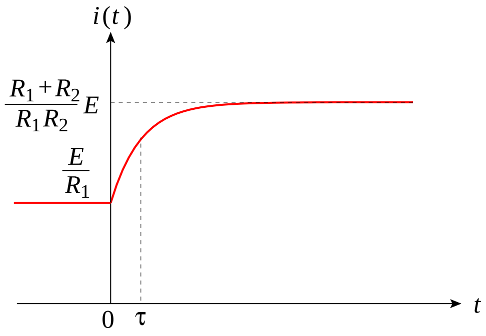
と書ける．ここで，未知定数 A を決定するために，初期条件として $t=0$ で $i(0)=I_0=\frac{E}{R_1}$ であることを用いると．

$$i(0) = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E + A = \frac{E}{R_1} \quad \to \quad A = \frac{E}{R_1} - \frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E = -\frac{E}{R_2}$$

以上より，$t>0$ における電流 $i(t)$ は

$$i(t)=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}E-\frac{E}{R_2}e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}=\frac{E}{R_2}\left\{\frac{R_1+R_2}{R_1}-e^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}t}\right\}$$

求まり，そのグラフは以下のようになる．



また，時定数 τ は

$$\tau=\frac{L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

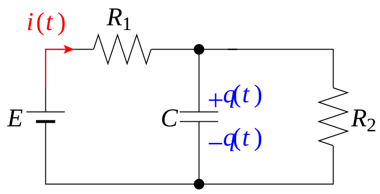
である．

2. (a) $t<0$ の定常状態において，電源から出る電流 I_0 とコンデンサに蓄えられている電荷 Q_0 は図 4(a) の回路を考え，コンデンサには電流が流れないこととコンデンサ C にかかる電圧が抵抗 R_2 にかかる電圧と等しいことを考えて

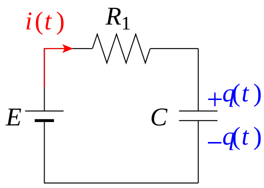
$$I_0 = \frac{E}{R_1+R_2}$$
$$Q_0 = \frac{CR_2E}{R_1+R_2}$$

(b) $t\to\infty$ の定常状態において，電源から出る電流 I_0 とコンデンサに蓄えられている電荷 Q_∞ は図 4(b) の回路を考え

$$I_\infty = 0$$
$$Q_\infty = CE$$



(a)



(b)

図 4

(c) $t>0$ における回路の方程式は，は図 4(b) の回路を考えてキルヒホッフの電圧則より

$$R_1i(t)+\frac{q(t)}{C}=E$$

であり，電源から出る電流はコンデンサに流れる電流と等しく $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ と表せるので

$$R_1\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=E$$

である．いま，この微分方程式の解 $q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ の和として $q(t)=q_s(t)+q_t(t)$ と表す．このとき，定常解 $q_s(t)$ は時間が十分経過した後の解であり

$$q_s(t)=Q_\infty=CE$$

である．一方，過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は右辺の電源に関する項を 0 とおいて

$$R_1\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=0$$

と書けける．上の式は一階の同時微分方程式であり，$q_t(t)$ は，積分定数を A として

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR_1}}$$

で与えられる．したがって，$q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{CR_1}}$$

と書ける．ここで，未知定数 A を決定するために，初期条件として $t = 0$ で $q(0) = Q_0 = \frac{CR_2E}{R_1+R_2}$ であることを用いると．

$$q(0) = CE + A = \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} - CE = -\frac{CR_1E}{R_1 + R_2}$$

以上より，$t > 0$ における電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = CE - \frac{CR_1E}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{CR_1}} = CE\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{CR_1}}\right)$$

また，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = CE \cdot \left(-\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{CR_1}\right) e^{-\frac{t}{CR_1}} = \frac{E}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{CR_1}}$$

であり，これらのグラフは以下のようになる．

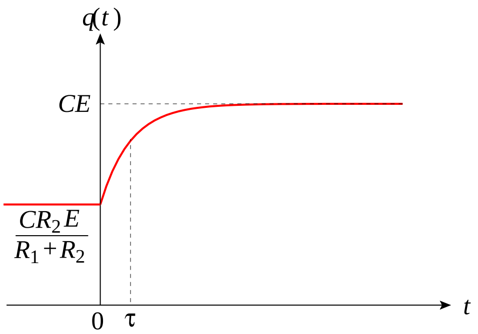


図 1

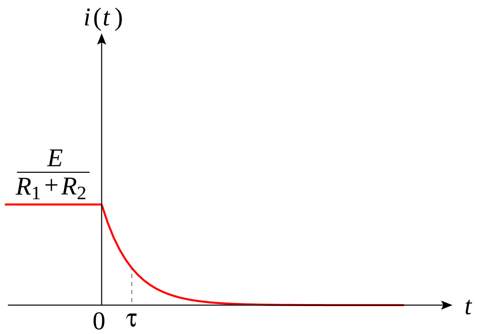


図 2

また，時定数 τ は

$$\tau = CR_1$$

である．