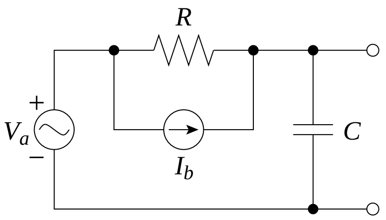
電気回路 I 第 7 回 宿題

宿題

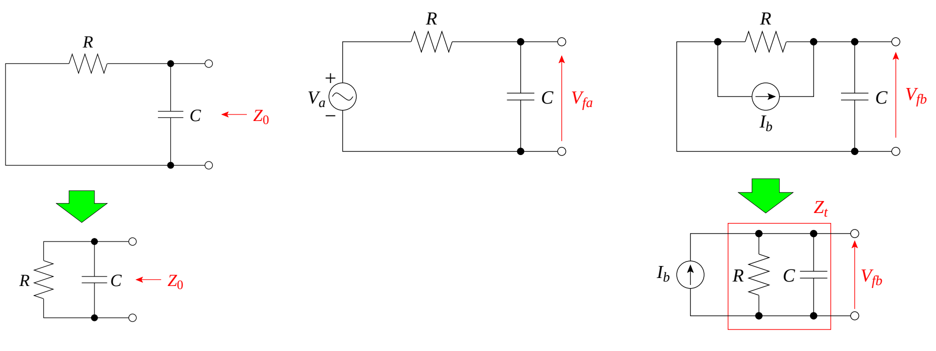
下図の回路において以下の問に答えよただし，$R = 20\ \Omega$，$C = \frac{1}{\pi}$ mF，$f = 50$ Hz，$V_a = 10$ V，$I_b = 1$ A とする．

1. テブナン等価回路を求めよ
2. ノルトン等価回路を求めよ
3. ある負荷を接続して消費電力を最大にしたい．負荷の回路と消費電力を求めよ．
4. 負荷が $Z_L = a(1 + j)$ で与えられるとき，消費電力を最大にする a の値と消費電力を求めよ．



解答

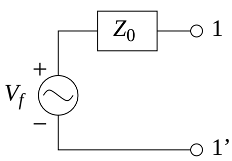
1. テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0 と開放電圧 V_f を求める．
   - 電圧源を短絡し，電流源を開放した図 1(a) の回路を考えると
   $$Z_0 = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{20}{1 + j2} = \frac{20(1 - j2)}{1 + 2^2} = 4(1 - j2)\ \Omega$$
   - 電流源を開放した図 1(b) の回路を考えると
   $$V_{fa} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_a = \frac{V_a}{1 + j\omega CR} = \frac{10}{1 + j2} = 2(1 - j2)\ \mathrm{V}$$
   - 電圧源を短絡した図 1(c) の回路を考えると，この場合には $Z_t = Z_0$ なので
   $$V_{fb} = Z_t \cdot I_b = Z_0 \cdot I_b = 4(1 - j2) \cdot 1 = 4(1 - j2)\ \mathrm{V}$$



(a) (b) (c)

図 1

したがって，テブナン等価回路は以下のように求まる．



$$Z_0 = 4(1 - j2)\ \Omega$$
$$V_f = V_{fa} + V_{fb} = 6(1 - j2)\ \mathrm{V}$$

2. ノルトン等価回路の内部アドミタンス Y_0 と短絡電流 I_s を求める．

- 電圧源を短絡し，電流源を開放した図 2(a) の回路を考えると

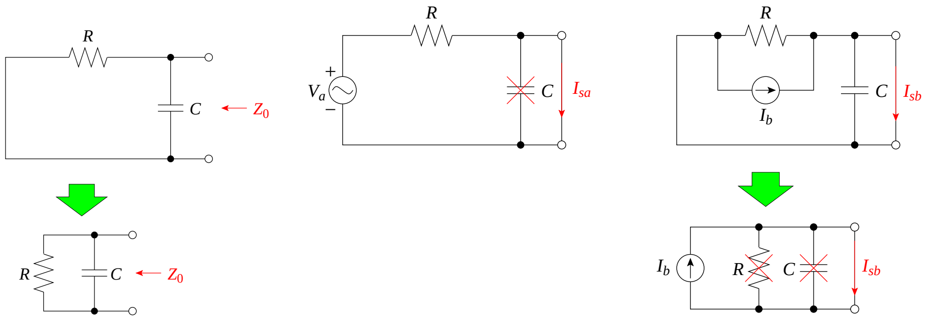
$$Y_0 = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1}{20} + j\frac{1}{10} = \frac{1}{20}(1 + j2)\ \mathrm{S}$$

- 電流源を開放した図 2(a) の回路を考えると

$$I_{sa} = \frac{V_a}{R} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}\ \mathrm{A}$$

- 電圧源を短絡した図 2(b) の回路を考えると，この場合には $Z_t = Z_0$ なので

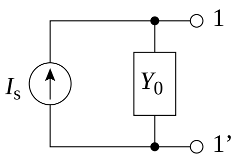
$$I_{sb} = I_b = 1\ \mathrm{A}$$



(a) (b) (c)

図 2

したがって，ノルトン等価回路は以下のように求まる．



$$Y_0 = \frac{1}{20}(1 + j2)\ \mathrm{S}$$

$$I_{sa} = I_{sa} + I_{sb} = \frac{3}{2}\ \mathrm{A}$$

3. 消費電力を最大にするためには負荷インピーダンスが内部インピーダンスと共役整合すればよいので

$$Z_L = Z_0^* = 4 + j8\ \Omega$$

であれば良く，インピーダンスの虚部が正であるので，抵抗 R_L とインダクタ L_L の直列接続で表現でき

$$Z_L = R_L + j\omega L_L = 4 + j8$$

より

$$R_L = 4\ \Omega$$

$$j\omega L_L = j8 \quad \rightarrow \quad L_L = \frac{8}{\omega} = \frac{8}{100\pi} = \frac{2}{25\pi}\ \mathrm{H}$$

と求まる．このときの消費電力は

$$P = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{36 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{45}{4} = 11.25\ \mathrm{W}$$

4. 負荷に流れる電流 I_L，負荷にかかる電圧 V_L は，負荷インピーダンスを $Z_L = R_L + jX_L$ と置くと

$$I_L = \frac{V_f}{Z_0 + Z_L}, \qquad V_L = Z_L I_L$$

であるので，負荷での消費電力は

$$P = \mathrm{Re}\left\{V_L^* I_L\right\} = \mathrm{Re}\left\{Z_L^* |I_L|^2\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{(R_L - jX_L)|V_f|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}\right\} = \frac{R_L |V_f|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}$$

問題では $R_0 = 4$，$X_0 = -8$，$R_L = a$，$X_L = a$ であるので，

$$P = \frac{a \cdot 180}{(a+4)^2 + (a-8)^2} = \frac{180a}{2a^2 - 8a + 80} = \frac{90a}{a^2 - 4a + 40}$$

いま，P の最大を求める代わりに $f(a) = \frac{1}{P}$ として，$f(a)$ の最小値を求める．

$$f(a) = \frac{1}{90}\left(a - 4 + \frac{40}{a}\right)$$

であるので，これを a で微分して

$$\frac{df(a)}{da} \quad = \quad \frac{1}{90}\left(1 - \frac{40}{a^2}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = 2\sqrt{10}$$

このときの消費電力は

$$P = \frac{90a}{a^2 - 4a + 40} = \frac{180\sqrt{10}}{40 - 8\sqrt{10} + 40} = \frac{180\sqrt{10}}{8\sqrt{10}(\sqrt{10} - 1)} = \frac{45}{2(\sqrt{10} - 1)} \simeq 10.41 \text{ W}$$