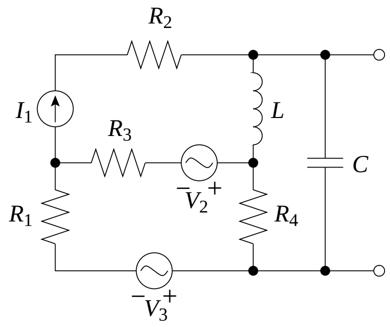
電気回路 I 第 6 回 宿題

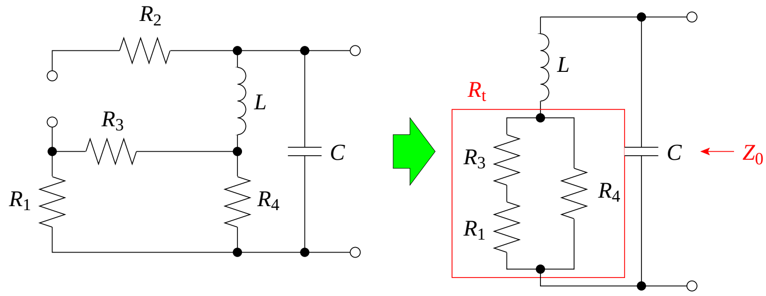
宿題

図の電源回路のテブナン等価回路，ノルトン等価回路を求めよ。ただし，$R_1 = R_3 = 10\ \Omega$，$R_2 = R_4 = 20\ \Omega$，$L = \frac{1}{5\pi}$ H，$C = \frac{1}{\pi}$ mF，$f = 50$ Hz，$I_1 = 2$ A，$V_2 = 5$ V，$V_3 = 10$ V とする．



解答

まず、この電源回路の内部インピーダンス Z_0 を求めため，電圧源を短絡し，電流源を開放した下図の回路を考える。



抵抗部分の合成抵抗は

$$R_t = \frac{(R_1 + R_3)R_4}{(R_1 + R_3) + R_4} = 10\ \Omega$$

であるので，内部インピーダンスは

$$Z_0 = \frac{(R_t + j\omega L)\cdot\frac{1}{j\omega C}}{(R_t + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(10 + j20)\cdot(-j10)}{10 + j20 - j10} = \frac{10(2 - j)}{1 + j} = \frac{10(2 - j)(1 - j)}{2} = 5(1 - j3)\ \Omega$$

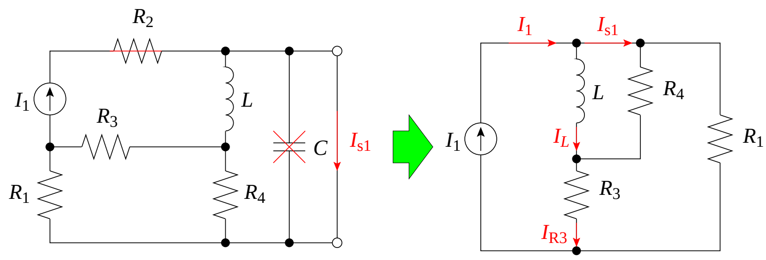
であり，内部アドミタンスは

$$Y_0 = \frac{1}{R_t + j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{10 + j20} + j\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1 - j2}{5} + j\frac{5}{50} = \frac{1 + j3}{50}\ \mathrm{S}$$

- **ノルトン等価回路**

次に，ノルトン等価回路の短絡電流を考えるために，電流源 I_1 のみを考慮した場合，電圧源 V_2 のみを考慮した場合，電圧源 V_3 のみを考慮した場合にわけてそれぞれ短絡電流 I_{s1}，I_{s2}，I_{s3} を求め，重ね合わせの理により短絡電流 $I_s = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}$ を求める．

まず，電流源 I_1 のみを考慮した場合，には下図の回路を得る．



図の回路で，短絡電流 I_{s1} は $I_1 - I_L$ で計算できる．R_3，R_4，L の合成インピーダンス Z は

$$Z = R_3 + \frac{j\omega L R_4}{j\omega L + R_4} = 10 + \frac{j400}{20 + j20} = 10 + \frac{j20(1-j)}{2} = 10 + 10 + j10 = 10(2+j)\ \Omega$$

であるので，抵抗 R_3 に流れる電流 I_{R3} を求めると

$$I_{R3} = \frac{R_1}{Z + R_1} I_1 = \frac{10}{10(3+j)} \cdot 2 = \frac{3-j}{5}\ \mathrm{A}$$

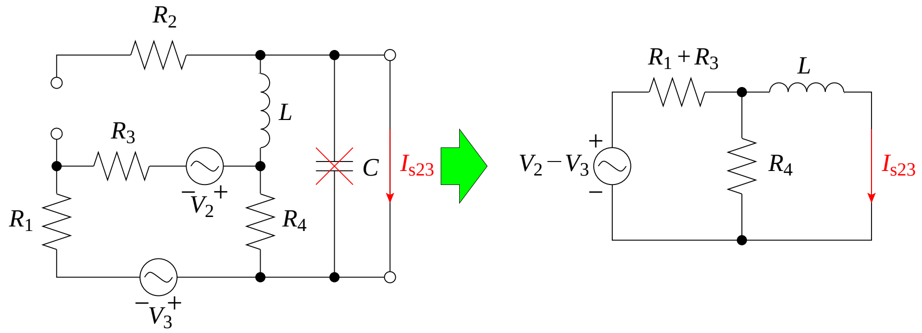
I_L は I_{R3} が L と R_4 に分かれて流れることを考えると

$$I_L = \frac{R_4}{R_4 + j\omega L} I_{R3} = \frac{20}{20 + j20} \cdot \frac{3-j}{5} = \frac{3-j}{5(1+j)} = \frac{(3-j)(1-j)}{10} = \frac{2-j4}{10} = \frac{1-j2}{5}\ \mathrm{A}$$

したがって

$$I_{s1} = I_1 - I_L = 2 - \frac{1-j2}{5}\frac{9+j2}{5}\ \mathrm{A}$$

一方，電圧源 V_2 を考慮した場合を考えるが，電流源 $_1$ を開放したときに，電圧源 V_2 と V_3 は直列接続になるので，ここでは電圧源 V_2 と V_3 を同時に考え $I_{s23} = I_{s2} + I_{s3}$ を求める．このとき，考える回路は下図の通りである．



回路の全インピーダンス Z は

$$Z = R_1 + R_3 + \frac{j\omega L R_4}{R_4 + j\omega L} = 20 + \frac{j400}{20(1+j)} = 20 + \frac{j20(1-j)}{2} = 20 + 10 + j10 = 10(3+j)\ \Omega$$

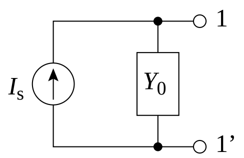
であるので

$$\begin{aligned} I_{s23} &= \frac{V_2 - V_3}{Z} \cdot \frac{R_4}{R_4 + j\omega L} = \frac{-5}{10(3+j)} \cdot \frac{20}{20(1+j)} = -\frac{1}{2(3+j)(1+j)} = -\frac{1}{4+j8} = -\frac{1-j2}{4\cdot 5} \\ &= -\frac{1-j2}{20}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

以上より，ノルトン等価回路の短絡電流は

$$I_s = I_{s1} + I_{s23} = \frac{9+j2}{5} - \frac{1-j2}{20} = \frac{35+j10}{20} = \frac{7+j2}{4}\ \mathrm{A}$$

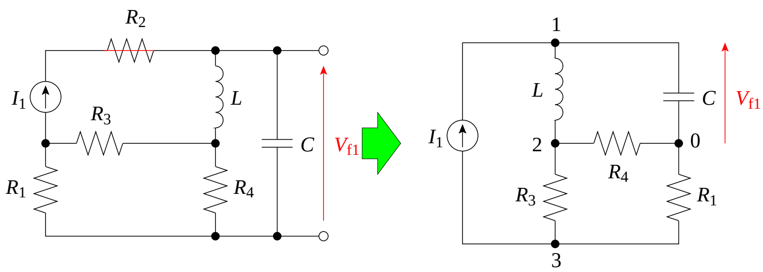
と求まり，ノルトン等価回路が以下のように書ける．



$$Y_0 = \frac{1+j3}{50}\ \mathrm{S}$$
$$I_s = \frac{7+j2}{4}\ \mathrm{A}$$

- **テブナン等価回路**

テブナン等価回路の開放電圧 V_f を 電流源 I_1 のみを考慮した場合と，電圧源 V_2，V_3 のみを考慮した場合に分けて，重ね合わせの理を用いて求める．まず，I_1 のみを考えた場合には，回路は以下のように書ける．



ここで，図のように節点番号を付け，節点 0 の電位を 0 とすると，求める電圧は節点 1 の電位として求まる．節点 1, 2, 3 の電位をそれぞれ V_1'，V_2'，V_3' として図の回路の節点方程式を立てると

$$\begin{bmatrix} j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

となり，具体的な数値を代入すると

$$\frac{1}{20} \begin{bmatrix} j & j & 0 \\ j & 3-j & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} j & j & 0 \\ j & 3-j & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ -40 \end{bmatrix}$$

上の行列の行列式 Δ は

$$\Delta = j(3-j) \cdot 4 - (j)^2 \cdot 4 - (-2)^2 \cdot j = 4 + j12 + 4 - j4 = 8(1+j)$$

であり，V_1' は

$$V_1' = \frac{\begin{vmatrix} 40 & j & 0 \\ 0 & 3-j & -2 \\ -40 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{160(3-j) + j80 - 160}{8(1+j)} = \frac{10(4-j)}{1+j} = 5(4-j)(1-j) = 5(3-j5)\ \mathrm{V}$$

と求まるので，$V_{f1} = 5(3-j5)$ V である．

次に，電圧源 V_2 と V_3 のみを考慮した場合には，以下の回路を得る．図のように閉路電流 I_1'，I_2' を設定すると，閉路方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 - V_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これに具体的な数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 + j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，この行列の行列式 Δ は

$$\Delta = 40(20 + j10) - (-20)^2 = 400(1+j)$$

であり，閉路電流 I_2' は

$$I_2' = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -5 \\ -20 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-100}{400(1+j)} = \frac{-(1-j)}{4 \cdot 2} = \frac{-1+j}{8}\ \mathrm{A}$$

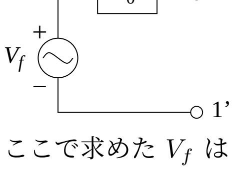
と求まる．いま，求めたい電圧はコンデンサの両端の電圧なので

$$V_{f23} = j\omega C I_2' = -j10 \cdot \frac{-1+j}{8} = \frac{5}{4}(1+j)\ \mathrm{V}$$

と求まる．以上より，テブナン等価回路の開放電圧は

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = 5(1-j3) + \frac{5}{4}(1+j) = \frac{5}{4}(13 - j19)\ \mathrm{V}$$

と求まるので，テブナン等価回路は以下のように書ける．



$$Z_0 = 5(1-j3)\ \Omega$$
$$V_f = \frac{5}{4}(13 - j19)\ \mathrm{V}$$

ここで求めた V_f は $V_f = Z_0 I_s$ として求まる値と一致している．