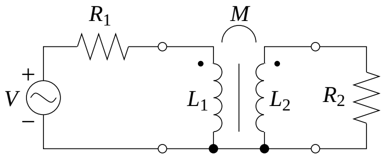
電気回路 I 第 1 回 宿題

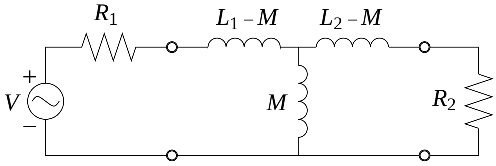
宿題

以下の回路の抵抗 R_2 に流れる電流 I_2 を求めよ．ただし，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_1 = 7\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{50\pi}$ H，$L_1 = \frac{2}{25\pi}$ H，$M = \frac{3}{100\pi}$ H，$V = 22$ V，$f = 50$ Hz とする．また，この変成器の結合係数 k はいくらか．

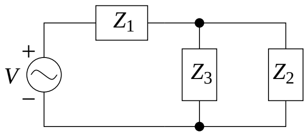


解答

変成器を T 形等価回路に置き換えると以下の回路を得る．



ここで，直列接続されている部分のインピーダンスを合成すると以下のような回路に書き直すことができ，Z_1，Z_2，Z_3 は $j\omega L_1 = j100\pi \cdot \frac{1}{50\pi} = j2\ \Omega$，$j\omega L_2 = j100\pi \cdot \frac{2}{25\pi} = j8\ \Omega$，$j\omega M = j100\pi \cdot \frac{3}{100\pi} = j3\ \Omega$ であることを利用して



$$
\begin{aligned}
Z_1 &= R_1 + j\omega(L_1 - M) = 1 + j2 - j3 = 1 - j \\
Z_2 &= j\omega(L_2 - M) + R_2 = 7 + j5 \\
Z_3 &= j\omega M = j3
\end{aligned}
$$

であるので，回路の合成インピーダンス Z_t は

$$
Z_t = Z_1 + (Z_2 // Z_3) = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2 + Z_3}
$$

したがって電源から出る電流 I_t は

$$
I_t = \frac{V}{Z_t} = \frac{(Z_2 + Z_3)V}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \tag{1}
$$

この電流が Z_2 と Z_3 に分かれて流れるので，分流の法則を用いると抵抗 R_2 に流れる電流 I_2 は

$$
I_2 = I_t \cdot \frac{1/Z_2}{1/Z_2 + 1/Z_3} = \frac{(Z_2 + Z_3)V}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_3 V}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
& Z_1 Z_2 = (1 - j)(7 + j5) = 7 + j5 - j7 + 5 = 12 - j2 \\
& Z_2 Z_3 = (7 + j5) \cdot j3 = -15 + j21 \\
& Z_3 Z_1 = j3 \cdot (1 - j) = 3 + j3 \\
& Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 = (12 - j2) + (-15 + j21) + (3 + j3) = j22 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

であるので，I_2 は上から下に流れる向きを正として

$$
I_2 = \frac{j3 \cdot 22}{j22} = 3\ \text{A} \tag{3}
$$

変成器の結合係数は

$$
k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{3}{100\pi}}{\sqrt{\frac{1}{50\pi} \cdot \frac{2}{25\pi}}} = \frac{\frac{3}{100\pi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{25\pi}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{100\pi}}{\frac{1}{25\pi}} = \frac{3}{4} \tag{4}
$$