平成２０年度電気回路 II 中間試験 (6 月 17 日実施)

1. 図 1 に示す変成器を含む回路について以下の問いに答よ．ただし，$C = \frac{1}{1200\pi}$ F，$R = 9\ \Omega$，$V = 30$ V，周波数を $f = 50$ Hz とする．

   (a) $L_1 = \frac{1}{5\pi}$ H，$L_2 = \frac{1}{20\pi}$ H，$M = \frac{2}{25\pi}$ H とするとき，2 次側の抵抗 R に流れる電流を求めよ．

   (b) 設問 (a) のとき変成器の結合係数 k を求めよ．

   (c) 変成器が理想変成器 (図 1′) で，1 次側と 2 次側の巻き数比が $1 : n$ であり，$n = 0.5$ のとき，抵抗 R に流れる電流を求めよ．

2. (a) 図 2 に示す回路に対して節点を設定し，節点行列が対称な形になるように，節点方程式を行列の形で書け (解く必要はない)．

   (b) 図 3 に示す回路の閉路方程式を立て，それを解くことにより，抵抗 R_1，R_2，R_3 に流れる電流を求めよ．ただし，$R_1 = R_2 = R_3 = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{25\pi}$ H，$C = \frac{1}{100\pi}$ F，$V_a = 10$ V，$V_b = 20$ V，$f = 50$ Hz とする．

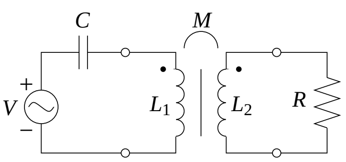


図 1

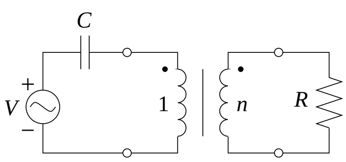


図 1′

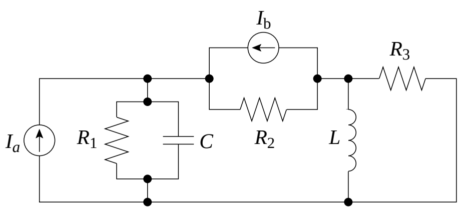


図 2

3. 図 4 の回路の $R_0 = 5\ \Omega$ に関する逆回路を書け．ただし，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 25\ \Omega$，$L = 50$ mH，$C = 400\ \mu$F とする．

4. 図 5 の回路を考え，$R = 5\ \Omega$，$L = \frac{1}{20\pi}$ H，$C = \frac{1}{500\pi}$ F，$I_1 = 1$ A，$V_2 = 5$ V，$f = 50$ Hz とする．

   (a) 図 5 の回路のテブナン等価回路を求めよ．

   (b) 図 5 の回路の端子 $1 - 1'$ に抵抗 R_L，コイル L_L，コンデンサ C_L のうちの 2 つの素子を使って構成される負荷を接続し，負荷での消費電力を最大にしたい．消費電力を最大にするための回路を書きその素子値を求めよ．また，そのときの消費電力 $P_{\max}$ を求めよ．

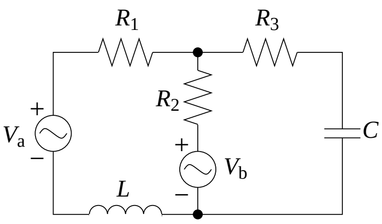


図 3

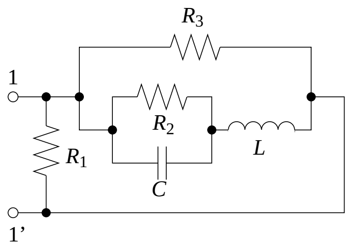


図 4

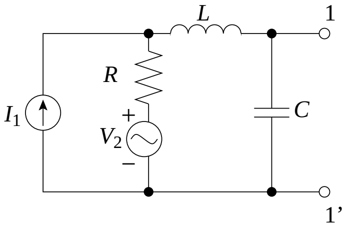
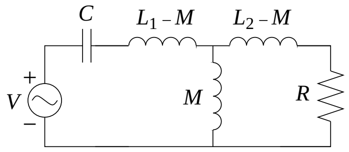


図 5

配点は，問 1:25 点，問 2:30 点，問 3:15 点，問 4:30 点

1. (a) 下図左の変成器の T 形等価回路を考える．



このとき，それぞれのインピーダンスは

$$\frac{1}{j\omega C} = -j12\ \Omega$$
$$j\omega(L_1 - M) = j20 - j8 = j12\ \Omega$$
$$j\omega(L_2 - M) = j5 - j8 = -j3\ \Omega$$
$$j\omega M = j8\ \Omega$$

であり，C と $L_1 - M$ の合成インピーダンスは 0 になる．したがって，電源電圧 V が $R + j\omega(L_2 - M)$ にかかることになるので，抵抗 R に流れる電流は

$$I_R = \frac{V}{R + j\omega(L_1 - M)} = \frac{30}{9 - j3} = \frac{10}{3 - j} = \frac{10(3 + j)}{3^2 + 1^2} = 3 + j\ \mathrm{A}$$

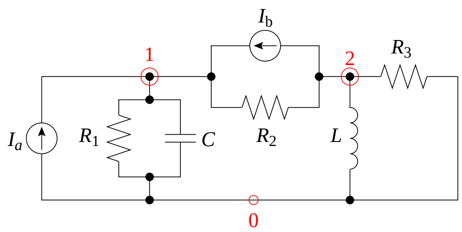
(b) 結合係数は

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{2}{25\pi}}{\sqrt{\frac{1}{100\pi^2}}} = \frac{\frac{2}{25\pi}}{\frac{1}{10\pi}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

(c) 1 次側の回路を 2 次側に移して考えると，$V \to nV$，$C \to \frac{C}{n^2}$ となるので，抵抗 R に流れる電流は

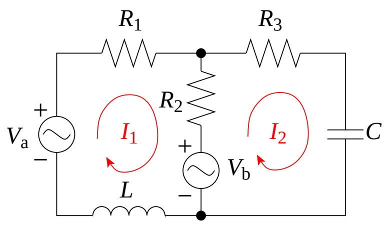
$$I_R = \frac{nV}{R + \frac{n^2}{j\omega C}} = \frac{15}{9 - j3} = \frac{5}{3 - j} = \frac{5(3 + j)}{3^2 + 1^2} = \frac{3 + j}{2}\ \mathrm{A}$$

2. (a) 下図のように節点を設定すると



$$\begin{bmatrix} I_a + I_b \\ -I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

(b) 下図のように閉路を設定すると閉路方程式は



$$\begin{bmatrix} V_a - V_b \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

数値を代入して

$$\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + j4 & -2 \\ -2 & 4 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

この行列式は

$$\Delta = (4 + j4)(4 - j) - (-2)^2 = 16 + j16 - j4 + 4 - 4 = 16 + j12 = 4(4 + j3)$$

したがって，閉路電流は

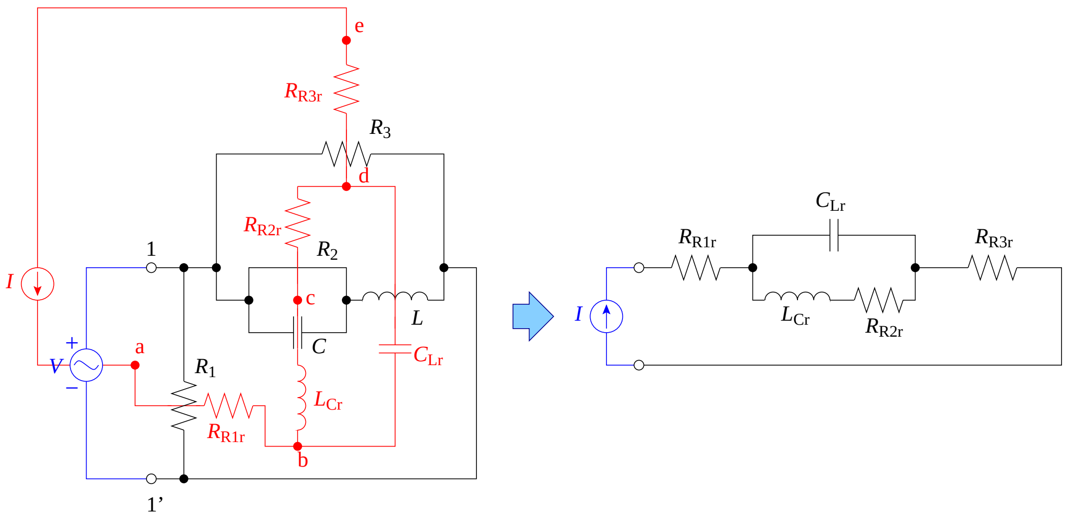
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -10 & -2 \\ 20 & 4-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-40+j10+40}{4(4+j3)} = \frac{j10}{4(4+j3)} = \frac{j10(4-j3)}{4\cdot(4^2+3^2)} = \frac{3+j4}{10} \\
&= 0.3+j0.4 \text{ A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 4+j4 & -10 \\ -2 & 20 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{80+j80-20}{4(4+j3)} = \frac{20(3+j4)}{4(4+j3)} = \frac{5(3+j4)(4-j3)}{25} \\
&= \frac{12-j9+j16+12}{5} = \frac{24+j7}{5} = 4.8+j1.4 \text{ A}
\end{aligned}
$$

以上より，回路の左から右，あるいは上から下を電流の正の向きとすると

$$
\begin{aligned}
I_{R_1} &= I_1 = 0.3+j0.4 \text{ A} \\
I_{R_2} &= I_1 - I_2 = -4.5-j \text{ A} \\
I_{R_3} &= I_2 = 4.8+j1.4 \text{ A}
\end{aligned}
$$

3. (a) 逆回路は下図右の電流源を取り除いた回路になる．



このときの各素子値は

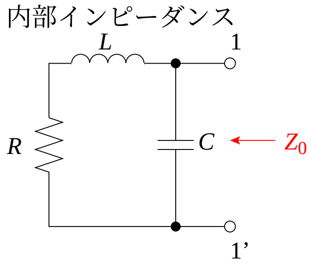
$$
R_{R_1} = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{25}{5} = 5\ \Omega, \qquad R_{R_2} = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{25}{10} = 2.5\ \Omega, \qquad R_{R_3} = \frac{R_0^2}{R_3} = \frac{25}{25} = 1\ \Omega
$$

$$
L_C = CR_0^2 = 400\times10^{-6}\cdot 25 = 10^{-2} = 10 \text{ mH}
$$

$$
C_L = \frac{L}{R_0^2} = \frac{50\times10^{-3}}{25} = 2\times10^{-3} = 2 \text{ F}
$$

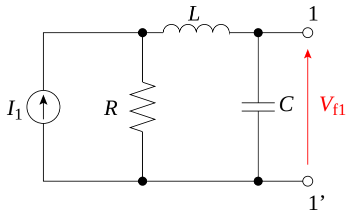
(b) テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求める．
ここで，あらかじめ $j\omega L = j5$, $\frac{1}{j\omega C} = -j5$ と計算しておく

- 内部インピーダンス



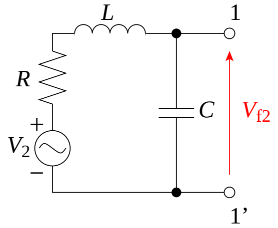
$$
\begin{aligned}
Z_0 &= (R+j\omega L)\,//\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = \frac{(R+j\omega L)\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{(5+j5)\cdot(-j5)}{5+j5-j5} = \frac{25-j25}{5} \\
&= 5-j5\ \Omega
\end{aligned}
$$

- 電流源 I_1 のみが作る開放電圧 V_{f1}



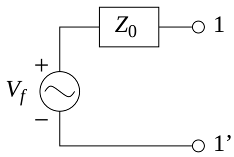
$$V_{f1} = \frac{R}{R + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} \cdot I_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{5}{5 + j5 - j5} \cdot 1 \cdot (-j5) = -j5 \text{ V}$$

- 電圧源 V_2 のみが作る開放電圧 V_{f2}



$$V_{f2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_2 = \frac{-j5}{5 + j5 - j5} \cdot 5 = -j5 \text{ V}$$

以上よりテブナン等価回路は

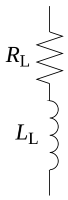


$$\begin{aligned} Z_0 &= 5 - j5\ \Omega \\ V_f &= V_{f1} + V_{f2} = -j10 \text{ V} \end{aligned}$$

(c) 最大電力伝送定理 (共役整合条件より) より

$$Z_L = Z_0^* = 5 + j5\ \Omega$$

インピーダンスの虚数部が正であるので，以下のように抵抗とコンデンサで構成できる．直列回路と並列回路の両方が考えられるが，直列回路の例を示す．



$$\begin{aligned} R_L + j\omega L_L = 5 + j5 \quad &\rightarrow \quad R_L = 5 \\ &\quad\ \ \omega L_L = 5 \quad \rightarrow \quad L_L \frac{5}{100\pi} = \frac{1}{20\pi} \text{ H} \end{aligned}$$

このとき，負荷で消費される電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4\mathrm{Re}\{Z_0\}} = \frac{|-j10|^2}{4 \cdot 5} = \frac{100}{20} = 5 \text{ W}$$