平成２０年度電気回路 II 期末試験 (8 月 05 日実施)

1. 図 1 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし, $R_1 = 2\ \Omega$、$R_2 = 3\ \Omega$、$R_3 = 2\ \Omega$、$C = 0.05$ F、$E = 10$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(0)$ を求めよ。

   (b) スイッチを開いた後にコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$、流れる電流 $i(t)$ を回路方程式 (微分方程式) を直接解くことにより求めよ。

   (c) 設問 (b) と同じ問題をラプラス変換を利用して求めよ。

2. 図 2 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし, $R = 10\ \Omega$、$L = 2$ H、$v(t) = 10\sin(5t)$ [V] とする。

   (a) $t = 0$ でコイル L に流れる電流 $i(0)$ を求めよ。

   (b) $t \geq 0$ でコイルに流れる電流 $i(t)$ を求めよ。

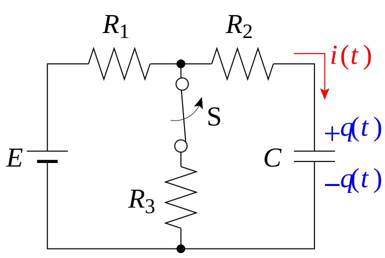

図 1

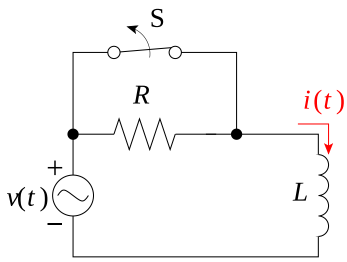

図 2

3. 図 3 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし、$R = 3\ \Omega$、$L = 0.2$ H、$C = 0.1$ F、$E = 30$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコンデンサ C に蓄えられている電荷 $q(0)$、コイルに流れる電流 $i(0)$ を求めよ。

   (b) スイッチを開いた後にコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$、流れる電流 $i(t)$ を求めよ。

4. 図 4 に示す回路が定常状態にあり、時刻 $t = 0$ でスイッチが開くものとする。以下の問いに答えよ。ただし, $R_1 = 1\ \Omega$、$R_2 = 2\ \Omega$、$L = 1$ H、$C = \frac{1}{8}$ F、$E = 30$ V とする.

   (a) $t = 0$ でコイル L に流れる電流 $i_2(0)$ を求めよ。

   (b) $t \geq 0$ でコイルに流れる電流 $i_2(t)$ を求めよ。

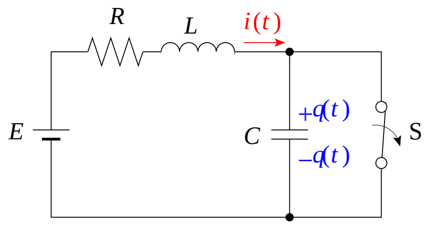

図 3

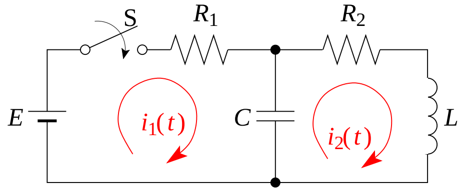

図 4

1. (a) $t \leq 0$ でコンデンサにかかる電圧を V_C とすると

$$V_C = \frac{R_3}{R_1 + R_3} V = \frac{2}{4} \times 10 = 5 \text{ V}$$

したがって，電荷 $q(0)$ は

$$q(0) = CV_C = 0.05 \times 5 = \frac{1}{4} \text{ C}$$

(b) キルヒホッフの電圧則より回路方程式は，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

上式に数値を代入して整理すると

$$5\frac{dq(t)}{dt} + 20q(t) = 10 \quad \rightarrow \quad \frac{dq(t)}{dt} + 4q(t) = 2$$

以上より，直流電源であることを考慮して，定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ

$$4q_s(t) = 2 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dq_t(t)}{dt} + 4q_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-4t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

したがって，電荷 $i(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{1}{2} + Ae^{-4t}$$

と書け，初期条件より

$$q(0) = \frac{1}{2} + A = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

と求まるので，電荷 $q(t)$ は最終的に以下のように求まる．

$$q(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-4t} = \frac{1}{4}\left(2 - e^{-4t}\right) \text{ [C]}$$

また，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = e^{-4t} \text{ [A]}$$

(c) 回路方程式は $q(t) = \int i(t)dt$ を考慮して

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E \quad \rightarrow \quad 5i(t) + 20\int i(t)dt = 10$$

と書けるので，$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ としてこれをラプラス変換すると

$$5I(s) + \frac{20}{s}\left\{I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{10}{s} \quad \rightarrow \quad 5I(s) + \frac{20}{s}\left\{I(s) + \frac{1}{4}\right\} = \frac{10}{s}$$

と書け，$I(s)$ について解くと

$$(5s + 20)I(s) = 10 - 5 \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{1}{s + 4}$$

したがって，電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = e^{-4t} \text{ [A]}$$

また，電荷 $q(t)$ は電流 $i(t)$ を積分することで

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(t)dt = \frac{1}{4} + \int_0^t e^{-4t} = \frac{1}{4} + \left[-\frac{e^{-4t}}{4}\right]_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-4t} \text{ [C]}$$

と求まり，この結果は (b) の結果と一致している．

2. (a) $t \leq 0$ では抵抗は短絡されているので，負荷はコイル L だけである．したがって，電流の複素振幅 I は，電源の角周波数を $\omega = 5$ rad/s として

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{10}{j5 \times 2} = -j$$

と求まり，この時間領域での解は

$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{-je^{j5t}\right\} = -\cos 5t$$

であり，時刻 $t = 0$ においては

$$i(0) = -1 \text{ A}$$

である．

(b) $t \geq$ における回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) \quad \rightarrow \quad 2\frac{di(t)}{dt} + 10i(t) = 10\sin(5t)$$

これを過渡解と定常解に分けて解くと，まず，定常解は交流理論より，電流の複素振幅を I_s として

$$I_s = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{10}{10 + j10} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$$

であり，この時間域の表現は

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{\frac{1-j}{2}e^{j5t}\right\} = \frac{1}{2}(\sin 5t - \cos 5t)$$

である．一方，過渡解に関しては

$$2\frac{di_t(t)}{dt} + 10i_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = Ae^{-5t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

以上より，$i(t)$ の一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{1}{2}(\sin 5t - \cos 5t) + Ae^{-5t}$$

と書け，初期条件より

$$i(0) = -\frac{1}{2} + A = -1 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

と求まるので，$i(t)$ は最終的に以下のように求まる．

$$i(t) = \frac{1}{2}(\sin 5t - \cos 5t) + \frac{1}{2}e^{-5t} \text{ [A]}$$

(別解)

$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ として回路方程式をラプラス変換すると

$$2\{sI(s) - i(0)\} + 10I(s) = \frac{10 \cdot 5}{s^2 + 5^2}$$

$i(0) = -1$ を考慮して上式を $I(s)$ について解き，整理すると

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{25}{(s^2+25)(s+5)} - \frac{1}{s+5} = \frac{K_1}{s+5} + \frac{K_2 s + K_3 \cdot 5}{s^2 + 5^2} - \frac{1}{s+5} \\ &= \frac{(K_1 + K_2)s^2 + (5K_2 + 25K_3)s + 25(K_1 + K_3)}{(s^2+25)(s+5)} - \frac{1}{s+5} \end{aligned}$$

$$K_1 + K_2 = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = -K_2$$

$$5(K_2 + K_3) = 0 \quad \rightarrow \quad K_3 = -K_2$$

$$25(K_1 + K_3) = 25 \quad \rightarrow \quad -50K_2 = 25 \quad \rightarrow \quad K_2 = -\frac{1}{2}, \quad K_1 = K_3 = \frac{1}{2}$$

以上より

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = K_1 e^{-5t} + K_2 \cos 5t + K_3 \sin 5t - e^{-5t} = \frac{1}{2}(\sin 5t - \cos 5t) - \frac{1}{2}e^{-5t} \text{ [A]}$$

3. (a) コンデンサは短絡されているので

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 \\ i(0) &= \frac{E}{R} = \frac{30}{3} = 10 \text{ A} \end{aligned}$$

(b) 回路方程式は，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ を考慮して

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 0.2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 10q(t) = 30 \\ \frac{d^2q(t)}{dt^2} + 15\frac{dq(t)}{dt} + 50q(t) = 150 \end{aligned}$$

この定常解 $q_s(t)$ は

$$50q_s(t) = 150 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 3 \text{ A}$$

であり，過渡解は $q_t(t) = Ae^{mt}$ の解を仮定すると

$$(m^2 + 15m + 50)q_t(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (m+5)(m+10) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -5, -10$$

であるので

$$q_t(t) = A_1e^{-5t} + A_2e^{-10t} \qquad (A_1, A_2\text{は積分定数})$$

したがって，電荷 $q(t)$ および 電流 $i(t)$ の一般解は

$$\begin{aligned} q(t) &= 3 + A_1e^{-5t} + A_2e^{-10t} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -5A_1e^{-5t} - 10A_2e^{-10t} \end{aligned}$$

初期条件より A_1，A_2 を求めると

$$\begin{aligned} q(0) &= 3 + A_1 + A_2 = 0 \\ i(0) &= -5A_1 - 10A_2 = 10 \qquad A_1 = -4,\ \ A_2 = 1 \end{aligned}$$

であるので，電荷 $q(t)$，電流 $i(t)$ はそれぞれ以下のように求まる．

$$\begin{aligned} q(t) &= 3 - 4e^{-5t} + e^{-10t} \text{ [C]} \\ i(t) &= 20e^{-5t} - 10e^{-10t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

(別解)

ラプラス変換を使う場合には，回路方程式を

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E \quad \rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + 15i(t) + 50\int i(t)dt = 150$$

と書き，これをラプラス変換することで

$$\{sI(s) - i(0)\} + 15I(s) + \frac{50}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{150}{s}$$

これを $I(s)$ について解くと

$$(s^2 + 15s + 50)I(s) = 10s + 150 \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{10s + 150}{(s+5)(s+10)}$$

したがって，$i(t)$ は $I(s)$ をラプラス逆変換することで

$$\begin{aligned} i(t) &= (s+5)I(s)|_{s=-5} + (s+10)I(s)|_{s=-10} = \left.\frac{10s+150}{s+10}\right|_{s=-5} + \left.\frac{10s+150}{s+5}\right|_{s=-10} \\ &= 20e^{-5t} - 10e^{-10t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

と求まり，電荷 $q(t)$ は $i(t)$ を積分することで

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) + \int_0^t i(t)dt = \int_0^t \left(20e^{-5t} - 10e^{-10t}\right)dt = \left[-4e^{-5t} + e^{-10t}\right]_0^t \\ &= -4e^{-5t} + e^{-10t} - (-4+1) = 3 - 4e^{-5t} + e^{-10t} \text{ [C]} \end{aligned}$$

と求まる．

4. (a) $t \leq 0$ では電源がつながれていないので，コンデンサの電荷 $q(t)$，コイルの電流 $i_2(t)$ は

$$\begin{aligned} i_2(0) &= 0 \\ q(0) &= 0 \end{aligned}$$

である．

(b) $t \leq 0$ で回路方程式をラプラス変換し行列の形で表すと，初期電荷，初期電流が 0 であることを考慮して

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & sL + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書ける．これに数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{8}{s} & -\frac{8}{s} \\ -\frac{8}{s} & s + 2 + \frac{8}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である．この閉路行列の行列式 Δ は

$$\Delta = \left(1 + \frac{8}{s}\right)\left(s + 2 + \frac{8}{s}\right) - \left(-\frac{8}{s}\right)^2 = \frac{s^2 + 10s + 24}{s} = \frac{(s+4)(s+6)}{s}$$

であるので，$I_2(s)$ は以下のように求まる．

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \frac{8}{s} & \frac{30}{s} \\ -\frac{8}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{240}{s^2} \times \frac{s}{(s+4)(s+6)} = \frac{240}{s(s+4)(s+6)}$$

これをラプラス逆変換すると $i_2(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i_2(t) &= sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+4)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-4} + (s+6)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\ &= \frac{240}{(s+4)(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=0} + \frac{240}{s(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=-4} + \frac{240}{s(s+4)}e^{st}\bigg|_{s=-6} \\ &= 10 - 30e^{-4t} + 20e^{-6t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

参考までに，$i_1(t)$ は

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{30}{s} & -\frac{8}{s} \\ 0 & \frac{s^2+2s+8}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{30(s^2+2s+8)}{s^2} \times \frac{s}{(s+4)(s+6)} = \frac{30(s^2+2s+8)}{s(s+4)(s+6)}$$

より

$$\begin{aligned} i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+4)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-4} + (s+6)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-6} \\ &= \frac{30(s^2+2s+8)}{(s+4)(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=0} + \frac{30(s^2+2s+8)}{s(s+6)}e^{st}\bigg|_{s=-4} + \frac{30(s^2+2s+8)}{s(s+4)}e^{st}\bigg|_{s=-6} \\ &= 10 - 60e^{-4t} + 80e^{-6t} \text{ [A]} \end{aligned}$$