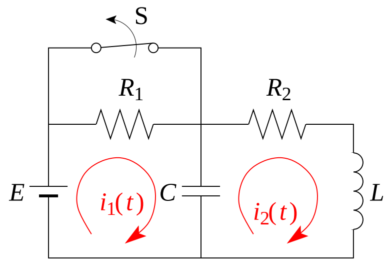
H20 年度電気回路 II 宿題 (第 14 回)

課題

図の回路で，時刻 $t=0$ でスイッチ S が開くとき，抵抗 R_1，R_2 に流れる電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めよ．ただし，$R_2=20\ \Omega$，$R_2=10\ \Omega$，$L=2$ H，$C=0.1$ F，$E=30$ V とする．



解答

まず，$t<0$ の定常状態について考える．抵抗 R_1 が短絡されているので，C および R_2L の直列回路にそれぞれ電圧 E がかかっている．したがって，コンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ とコイルに流れている電流 $i(t)$ の $t=0$ における値は

$$
\begin{aligned}
q_C(0) &= CE = 3\ \mathrm{C} \qquad \left(= \int (i_1(t)-i_2(t))\,dt\Big|_{t=0}\right) \\
i_L(0) &= \frac{E}{R_2} = 3\ \mathrm{A} \qquad (= i_2(0))
\end{aligned}
$$

次に，$t \geq 0$ での過渡現象を考える．このとき回路方程式は，各閉路ごとに

$$
\begin{aligned}
&R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int (i_1(t)-i_2(t))\,dt = E \\
&R_2 i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int (i_2(t)-i_1(t))\,dt = 0
\end{aligned}
$$

と書くことができる．この式をラプラス変換すると

$$
\begin{aligned}
&R_1 I_1(s) + \frac{1}{sC}\left\{I_1(s) - I_2(s) + \int (i_1(t)-i_2(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{E}{s} \\
&R_2 I_2(s) + L\left\{sI_2(s) - i_2(0)\right\} + \frac{1}{sC}\left\{I_1(s) - I_2(s) + \int (i_2(t)-i_1(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

上の式を行列の形で書き直すと

$$
\begin{bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{sC} & -\dfrac{1}{sC} \\ -\dfrac{1}{sC} & sL + R_2 + \dfrac{1}{sC} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{E}{s} - \dfrac{q_C(0)}{sC} \\ Li_L(0) + \dfrac{q_C(0)}{sC} \end{bmatrix}
$$

上式に具体的な数値を代入すると

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{10(2s+1)}{s} & -\dfrac{10}{s} \\ -\dfrac{10}{s} & \dfrac{2s^2+10s+10}{s} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{6(s+5)}{s} \end{bmatrix}
$$

上式を Cramer の公式を用いて解くと

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{10(2s+1)}{s}\cdot\frac{2s^2+10s+10}{s} - \left(-\frac{10}{s}\right)^2 = \frac{40s^3+220s^2+300s}{s^2} = \frac{20(2s^2+11s+15)}{s} \\
&= \frac{20(2s+5)(s+3)}{s}
\end{aligned}
$$

$$
I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{10}{s} \\ \dfrac{6(s+5)}{s} & \dfrac{2s^2+10s+10}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{60(s+5)}{s^2}\cdot\frac{s}{20(2s+5)(s+3)} = \frac{\frac{3}{2}(s+5)}{s\left(s+\frac{5}{2}\right)(s+3)}
$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{10(2s+1)}{s} & 0\\ -\dfrac{10}{s} & \dfrac{6(s+5)}{s}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{60(2s+1)(s+5)}{s^2}\cdot\frac{s}{20(2s+5)(s+3)}=\frac{\frac{3}{2}(2s+1)(s+5)}{s\left(s+\frac{5}{2}\right)(s+3)}$$

この $I_1(s)$，$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0}+\left(s+\frac{5}{2}\right)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{5}{2}}+(s+3)\,I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-3}\\
&= \frac{3(s+5)}{2\left(s+\frac{5}{2}\right)(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=0}+\frac{3(s+5)}{2s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{5}{2}}+\frac{3(s+5)}{2s\left(s+\frac{5}{2}\right)}e^{st}\Bigg|_{s=-3}\\
&= 1-3e^{-\frac{5}{2}t}+2e^{-3t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0}+\left(s+\frac{5}{2}\right)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{5}{2}}+(s+3)\,I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3}\\
&= \frac{3(2s+1)(s+5)}{2\left(s+\frac{5}{2}\right)(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=0}+\frac{3(2s+1)(s+5)}{2s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{5}{2}}+\frac{3(2s+1)(s+5)}{2s\left(s+\frac{5}{2}\right)}e^{st}\Bigg|_{s=-3}\\
&= 1+12e^{-\frac{5}{2}t}-10e^{-3t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}$$

コンデンサに蓄えられている電荷は

$$\begin{aligned}
q_C(t) &= q_C(0)+\int_0^t (i_1(t)-i_2(t))\,dt=2+\int_0^t\left(-15e^{-\frac{5}{2}t}+12e^{-3t}\right)dt=2+\left[6e^{-\frac{5}{2}t}-4e^{-3t}\right]_0^t\\
&= 3+6e^{-\frac{5}{2}t}-4e^{-3t}-6+4\\
&= 1+6e^{-\frac{5}{2}t}-4e^{-3t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}$$

ここで，確認のために $t=0$ と $t\to\infty$ の状態を考える．

$$\begin{aligned}
i_L(0) &= i_2(0)=1+12-10=3\ \mathrm{A}\\
q_C(0) &= 1+6-4=3\ \mathrm{C}
\end{aligned}$$

は確かに初期条件と一致しており

$$\begin{aligned}
i_L(\infty) &= i_1(0)=i_2(0)=1\ \mathrm{A}\\
q_C(\infty) &= 1\ \mathrm{C}
\end{aligned}$$

は $t\to\infty$ の定常状態

$$\begin{aligned}
i_L(\infty) &= \frac{E}{R_1+R_2}=1\ \mathrm{A}\\
q_C(\infty) &= C\cdot\frac{R_2E}{R_1+R_2}=1\ \mathrm{C}
\end{aligned}$$

と一致していることがわかる．