H20 年度電気回路 II 宿題 (第 13 回)

課題

第 11 回の宿題の問 2, 3 の解 $i(t)$ をラプラス変換を利用して求めよ．

解答

まず，$t<0$ の定常状態について考える．この場合，コンデンサには電流が流れず，コイルの抵抗は 0 になるので

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1+R_2} \\ q(0) &= C\frac{R_2E}{R_1+R_2} \end{aligned}$$

次に，$t>0$ での解を考える．このとき回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)+\frac{q(t)}{C}=E$$

と書くことができ，$q(t)=\int i(t)dt$ の関係を用いると

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E$$

を得る．上式をラプラス変換すると

$$L\left\{sI(s)-i(0)\right\}+R_1 I(s)+\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s)+\int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s}$$

ここで

$$I(s)=\frac{E+sLi(0)-\frac{q(0)}{C}}{Ls^2+R_1 s+\frac{1}{C}}$$

1. 初期条件は $i(0)=\frac{5}{4}$ A，$q(0)=\frac{5}{32}$ C であるので，

$$I(s)=\frac{20+\frac{5}{2}s-5}{2s^2+12s+32}=\frac{5}{4}\cdot\frac{s+6}{(s+3)^2+7}=\frac{5}{4}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{7})^2}\frac{\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\sqrt{7}}{(s+3)^2+(\sqrt{7})^2}\right\}$$

ここで，ラプラス変換表より

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right\}=\cos\sqrt{7}t,\qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right\}=\sin\sqrt{7}t$$

と推移定理

$$F(s+3)=e^{-3t}f(t)$$

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=\frac{5}{4}\left\{\cos\sqrt{7}t+\frac{3}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t\right\}e^{-3t}\ [\mathrm{A}]=\frac{5}{4}\left\{\cos\sqrt{7}t+\frac{3\sqrt{7}}{7}\sin\sqrt{7}t\right\}e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

を利用して

2. $i(0)=1$ A，$q(0)=\frac{1}{8}$ C であるので，

$$I(s)=\frac{20+2s-4}{2s^2+16s+32}=\frac{s+4+4}{(s+4)^2}=\frac{s+4}{(s+4)^2}+\frac{4}{(s+4)^2}=\frac{1}{(s+4)}+\frac{4}{(s+4)^2}$$

これをラプラス逆変換すると

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}e^{-4t}+4te^{-4t}=(1+4t)e^{-4t}\ [\mathrm{A}]$$

3. $i(0) = \frac{5}{6}$ A, $q(0) = \frac{5}{48}$ C であるので

$$I(s) = \frac{20 + \frac{5}{3}s - \frac{10}{3}}{2s^2 + 10s + 32} = \frac{60 + 5s - 10}{6(s^2 + 10s + 16)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{s + 10}{(s+2)(s+8)}$$

これをラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned}
i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = (s+2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+8)I(s)e^{st}\Big|_{s=-8} \\
&= \frac{5}{6} \cdot \frac{s+10}{s+8} e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{s+10}{s+2} e^{st}\Bigg|_{s=-8} = \frac{5}{6}\left\{\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}\right\} \\
&= \frac{5}{18}\left\{4e^{-2t} - e^{-8t}\right\} \text{ [A]}
\end{aligned}$$