H20 年度電気回路 II 宿題 (第 12 回)

課題

1. 以下の関数をラプラス変換の定義

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

に従ってラプラス変換せよ．ただし，$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ とし，$a > 0$，n は整数とする．

$$\frac{di(t)}{dt}, \qquad \int i(t)dt, \qquad u(t-a), \qquad e^{-at}, \qquad \sin(\omega t), \qquad \cos(\omega t), \qquad t^n$$

2. 推移定理 (周波数領域) を証明し，以下の関数を上の結果と推移定理を用いてラプラス変換せよ．

$$u(t)e^{-3t}, \qquad e^{-4t}\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. 以下の関数をラプラス逆変換せよ．

$$\frac{5s+20}{s^2+16}, \qquad \frac{5s+20}{s^2+6s++25}, \qquad \frac{10(s+4)}{s^2+8s+15}, \qquad \frac{3s^2+14s+4}{(s+2)^2(s+5)}, \qquad \frac{s^2-8s-3}{(s+2)(s^2+9)}$$

解答

1. (a) 部分積分を利用して解く

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty i(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\
&= \{0 - i(0)\} + s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = -i(0) + sI(s) \\
&= sI(s) - i(0)
\end{aligned}$$

(b) $i(t) = \frac{df(t)}{dt}$ と置いて，(a) の結果を利用する．

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = sF(s) - f(0) \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + f(0)\right)$$

ここで，$f(t) = \int i(t)dt$ であるので

$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\} = F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right)$$

(c) $u(t-a)$ は $t \geq a$ で値が 1，$t < a$ で値が 0 であるので

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

(d)

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin\omega t\} &= \int_0^\infty \sin\omega t\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(st+j\omega)t}}{j2}dt \\
&= \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)} - \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{j2}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{j2}\cdot\frac{j2\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \int_0^\infty \cos\omega t\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}+e^{-(st+j\omega)t}}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)}+\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n\cdot e^{-st}dt = \left[t^n\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{s}\cdot t^{n-1}e^{-st}dt \\
&= \{0-0\} + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt \\
&= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}
\end{aligned}$$

上の計算を繰り返すと

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\mathcal{L}\{t^{1-1}\} = \frac{n!}{s^n}\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

2. 推移定理は以下のように証明できる

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-bt}f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+b)t}dt$$

$s+b=s'$ と置き，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-s't}dt = F(s') = F(s+b)$$

(a) $f(t)=u(t)$ と置いて推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}$$

であるので

$$\mathcal{L}\left\{u(t)e^{-3t}\right\} = F(s+3) = \frac{1}{s+3}$$

(b) $f(t)$ を以下のように置く (三角関数の加法定理を利用)

$$f(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2t + \cos 2t$$

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は，1 の結果より

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{s+2}{s^2+2^2} = \frac{s+2}{s^2+4}$$

推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-4t}f(t)\right\} = F(s+4) = \frac{(s+4)+2}{(s+4)^2+4} = \frac{s+6}{s^2+8s+20}$$

3. (a) 1(f) の結果より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+20}{s^2+16}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{5\cdot\left(\frac{s}{s^2+4^2}+\frac{4}{s^2+4^2}\right)\right\}=5\left(\cos 4t+\sin 4t\right)$$

(b) 1(f),(g) の結果と推移定理を用いる

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+20}{s^2+6s+25}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s+3)+5}{(s+3)^2+4^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s+3)}{(s+3)^2+4^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{4}\cdot 4}{(s+3)^2+4^2}\right\}\\ &= 5e^{-3t}\left(\cos 4t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\end{aligned}$$

(c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10(s+4)}{s^2+8s+15}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{(s+3)(s+5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2}{s+5}\right\}$$

ここで $F(s)=\dfrac{10s+40}{(s+3)(s+5)}$ とすると

$$K_1=\left.(s+3)F(s)\right|_{s=-3}=\left.\frac{10s+40}{s+5}\right|_{s=-3}=5$$

$$K_2=\left.(s+5)F(s)\right|_{s=-5}=\left.\frac{10s+40}{s+3}\right|_{s=-5}=5$$

以上より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{s^2+8s+15}\right\}=K_1e^{-3t}+K_2e^{-5t}=5e^{-3t}+5e^{-5t}$$

(d)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+14s+4}{(s+2)^2(s+5)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}\right\}$$

ここで，$F(s)=\dfrac{3s^2+14s+4}{(s+2)^2(s+5)}$ と置くと，K_1，K_3 に関しては，以下のように簡単に求まる．

$$K_1=\left.(s+2)^2F(s)\right|_{s=-2}=\left.\frac{3s^2+14s+4}{s+5}\right|_{s=-2}=\frac{-12}{3}=-4$$

$$K_3=\left.(s+5)F(s)\right|_{s=-5}=\left.\frac{3s^2+14s+4}{(s+2)^2}\right|_{s=-5}=\frac{9}{9}=1$$

これらを，もとの式に代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{K_1}{(s+2)^2}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{K_3}{s+5}=\frac{-4}{(s+2)^2}+\frac{K_2}{s+2}+\frac{1}{s+5}=\frac{-4(s+5)+K_2(s+2)(s+5)+(s+2)^2}{(s+2)^2(s+5)}\\ &=\frac{(K_2+1)s^2+7K_2s+(10K_2-16)}{(s+2)^2(s+5)}\end{aligned}$$

s^2 の係数は 3 であるので，係数比較により，$K_2=2$ が求まる．この結果を s，1 の係数に代入すると確かに元の式と一致することが確かめられる．したがって，ラプラス変換表を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+14s+4}{(s+2)^2(s+5)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+5}\right\}=-4te^{-2t}+2e^{-2t}+e^{-5t}\\ &= 2(1-2t)e^{-2t}+e^{-5t}\end{aligned}$$

(e) ラプラス変換表を用いることを考えて，以下のように変形する

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-8s-3}{(s+2)(s^2+9)}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2 s+K_3}{s^2+9}\right\}$$

$$\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2 s+K_3}{s^2+9}=\frac{K_1(s^2+9)+(s+2)(K_2 s+K_3)}{(s+2)(s^2+9)}=\frac{(K_1+K_2)s^2+(2K_2+K_3)s+(9K_1+2K_3)}{(s+2)(s^2+9)}$$

であるので，係数比較により

$$\begin{cases} K_1+K_2=1 & \rightarrow \quad K_1=1-K_2 \\ 2K_2+K_3=-8 & \rightarrow \quad K_3=-8-2K_2 \\ 9K_1+2K_3=-3 & \rightarrow \quad 9-9K_2-16-4K_2=-3 \quad \rightarrow \quad -13K_2=4 \quad \rightarrow \quad K_2=-\frac{4}{13} \end{cases}$$

よって

$$K_1=\frac{17}{13},\qquad K_2=-\frac{4}{13},\qquad K_3=-\frac{96}{13}$$

以上より

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-8s-3}{(s+2)(s^2+9)}\right\}=\frac{1}{13}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{17}{s+2}+\frac{4s+32\cdot 3}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{13}\left(17e^{-2t}-4\cos 3t-32\sin 3t\right)$$