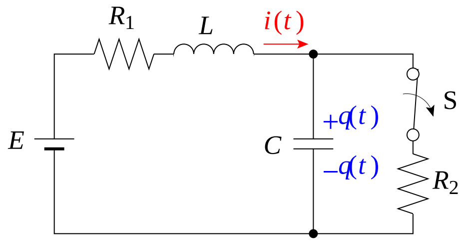
電気回路 II 第 11 回 宿題

宿題

以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が開くものとする．以下の各場合について電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，t の単位は秒とする．

1. $E = 20$ V，$R_1 = 12\ \Omega$，$R_2 = 4\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{32}$ F
2. $E = 20$ V，$R_1 = 16\ \Omega$，$R_2 = 4\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{32}$ F
3. $E = 20$ V，$R_1 = 20\ \Omega$，$R_2 = 4\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{32}$ F



解答

まず，$t < 0$ の定常状態について考える．この場合，コンデンサには電流が流れず，コイルの抵抗は 0 になるので

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} \\ q(0) &= C\frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

次に，$t > 0$ での解を考える．このとき回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

と書くことができ，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R_1\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

を得る．$q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分け，定常解に対しては (直流電源なので) $d/dt \to 0$ であることを利用すると

$$L\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + R_1\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad q_s(t) = CE$$

過渡解に対しては，$E \to 0$ と置いて

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + R_1\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

という 2 階の微分方程式を得るので，$q_t(t) = Ae^{mt}$ なる解を仮定し，上式に代入すると

$$\left(Lm^2 + R_1 m + \frac{1}{C}\right) q_t(t) = 0$$

を得る．上式の $q_t(t)$ は 0 ではないので，特性方程式

$$Lm^2 + R_1 m + \frac{1}{C} = 0$$

を解いて，m の値を計算することで，過渡解 $q_t(t)$ を求める．

1. 初期条件は

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}\ \text{A} \\ q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 20}{16 \cdot 32} = \frac{5}{32}\ \text{C} \end{aligned}$$

定常解は

$$q_s(t) = CE = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}\ \mathrm{C}$$

過渡解は

$$\begin{aligned} 2(m^2+6m+16) = 0 \qquad &\rightarrow \qquad m = -3 \pm \sqrt{3^2-16} = -3 \pm j\sqrt{7} \\ \rightarrow \qquad & q_t(t) = \left(A_1 \cos\sqrt{7}t + A_2 \sin\sqrt{7}t\right) e^{-3t}\ [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{8} + \left(A_1 \cos\sqrt{7}t + A_2 \sin\sqrt{7}t\right) e^{-3t} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = \left\{(-3A_1 + \sqrt{7}A_2)\cos\sqrt{7}t + (-3A_2 - \sqrt{7}A_1)\sin\sqrt{7}t\right\} e^{-3t} \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{5}{8} + A_1 = \frac{5}{32} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = \frac{5}{32} - \frac{20}{32} = -\frac{15}{32} \\ i(0) &= -3A_1 + \sqrt{7}A_2 = \frac{5}{4} \qquad \rightarrow \qquad A_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{5}{4} + 3A_1\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{40}{32} - \frac{45}{32}\right) = -\frac{5}{32\sqrt{7}} = -\frac{5\sqrt{7}}{224} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{8} - \frac{5}{32}\left(3\cos\sqrt{7}t + \frac{\sqrt{7}}{7}\sin\sqrt{7}t\right) e^{-3t}\ [\mathrm{C}] \\ i(t) &= \frac{5}{4}\left(\cos\sqrt{7}t + \frac{3\sqrt{7}}{7}\sin\sqrt{7}t\right) e^{-3t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

2. 初期条件は

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{20}{20} = 1\ \mathrm{A} \\ q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1+R_2} = \frac{4\cdot 20}{20\cdot 32} = \frac{1}{8}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

定常解は

$$q_s(t) = CE = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}\ \mathrm{C}$$

過渡解は

$$\begin{aligned} 2(m^2+8m+16) = 0 \qquad &\rightarrow \qquad m = -4\ \ (\text{重解}) \\ \rightarrow \qquad & q_t(t) = A_1 e^{-4t} + A_2 t e^{-4t} = (A_1 + A_2 t)\, e^{-4t}\ [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{8} + (A_1 + A_2 t)\, e^{-4t} \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = A_2 e^{-4t} - 4(A_1 + A_2 t)e^{-4t} = \{(-4A_1 + A_2) - 4A_2 t\}\, e^{-4t} \end{aligned}$$

初期条件より

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{5}{8} + A_1 = \frac{1}{8} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \\ i(0) &= -4A_1 + A_2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad A_2 = 1 + 4A_1 = 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{8} - \left(\frac{1}{2} + t\right) e^{-4t}\ [\mathrm{C}] \\ i(t) &= (1 + 4t)\, e^{-4t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

3. 初期条件は

$$
\begin{aligned}
i(0) &= \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}\ \mathrm{A} \\
q(0) &= \frac{CR_2E}{R_1+R_2} = \frac{4\cdot 20}{24\cdot 32} = \frac{5}{48}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

定常解は

$$
q_s(t) = CE = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}\ \mathrm{C}
$$

過渡解は

$$
\begin{aligned}
&2(m^2+10m+16)=0 \quad \to \quad 2(m+2)(m+8)=0 \quad \to \quad m=-2,\ -8 \\
&\quad \to \quad q_t(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}\ [\mathrm{C}]
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{5}{8} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t} \\
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 8A_2 e^{-8t}
\end{aligned}
$$

初期条件より

$$
\begin{aligned}
q(0) &= \frac{5}{8} + A_1 + A_2 = \frac{5}{48} \quad \to \quad 5 + 8A_1 + 8A_2 = \frac{5}{6} \\
i(0) &= -2A_1 - 8A_2 = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

この連立一次方程式を解くと

$$
\begin{aligned}
&5 + 6A_1 = \frac{5}{3} \quad \to \quad A_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{3} - 5\right) = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9} \\
&A_2 = \frac{5}{48} - \frac{5}{8} - A_1 = -\frac{25}{48} + \frac{5}{9} = \frac{-75+80}{144} = \frac{5}{144}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
q(t) &= \frac{5}{8} - \frac{5}{9}e^{-2t} + \frac{5}{144}e^{-8t}\ [\mathrm{C}] \\
i(t) &= \frac{10}{9}e^{-2t} - \frac{5}{18}e^{-8t} = \frac{5}{18}\left(4e^{-2t} - e^{-8t}\right)\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$