電気回路 II 第 10 回 宿題

宿題

以下の回路において，時刻 $t=0$ でスイッチ S が開くものとする．以下の各場合について電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

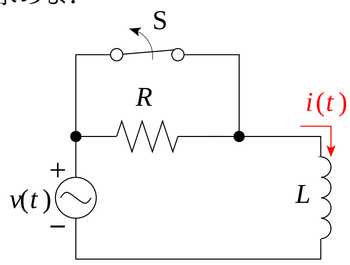

図 1

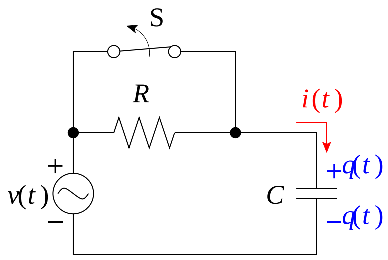

図 2

1. 図 1 の回路で，$R=6\ \Omega$，$L=2$ H，$v(t)=10\sin(3t)$ V
2. 図 2 の回路で，$R=6\ \Omega$，$C=\frac{1}{30}$ F，$v(t)=10\sin(5t)$ V

解答

1. (a) $t<0$ の定常状態を求める

   $t<0$ では抵抗は短絡されているので、電圧源 (角周波数 3 rad/s) とコイルのみの回路になる。いま、$v(t)$ の複素表現を振幅表示で $V=10$ とすると、複素電流 I は

   $$I=\frac{V}{j\omega L}=\frac{10}{j6}=-j\frac{5}{3}$$

   したがって、時間領域の表現は

   $$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{-j\frac{5}{3}e^{j3t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{-j\frac{5}{3}(\cos 3t+j\sin 3t)\right\} \\ &= \mathrm{Im}\left\{-j\frac{5}{3}\cos 3t+\frac{5}{3}\sin 3t\right\}=-\frac{5}{3}\cos 3t \end{aligned}$$

   と求まり、時刻 $t=0$ における電流 $i(0)$ は

   $$i(0)=-\frac{5}{3}\cos 0=-\frac{5}{3}\ \mathrm{A}$$

   と求まる。

   (b) $t\to\infty$ における定常状態を求める。

   回路は RL 直列回路に交流電源が接続されたものになるので、(a) と同様にして複素電流 I は振幅表現で

   $$I=\frac{V}{R+j\omega L}=\frac{10}{6+j6}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1+j}=\frac{5}{6}(1-j)$$

   と表され、この時間領域表現は

   $$i(t)=\mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{\frac{5}{6}(1-j)e^{j3t}\right\}=\frac{5}{6}(\sin 3t-\cos 3t)$$

   と求まり、これが $t>0$ での定常解 $i_s(t)$ となる。

   (c) $t>0$ における過渡現象

   回路方程式は以下のように書ける

   $$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=v(t)$$

   この微分方程式の解を $i(t)=i_s(t)+i_t(t)$ のように、定常解と過渡解にわけ、定常解 $i_s(t)$ は既に (b) で求めているので、過渡解 $i_t(t)$ を求める。過渡解に対する方程式は $v(t)\to 0$ として

   $$L\frac{di_t(t)}{dt}+Ri_t(t)=0$$

であるので、この解を $i_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定して、上式に代入すると

$$(Lm + R)Ae^{mt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad Lm + R = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = -\frac{R}{L}$$

よって

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-3t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

以上より $t > 0$ での一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{5}{6}(\sin 3t - \cos 3t) + Ae^{-3t}$$

と書ける。未知定数 A を決めるために、$t = 0$ でコイルに流れる電流が連続という初期条件を用いると

$$i(0) = -\frac{5}{6} + A = -\frac{5}{3} \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{5}{3} + \frac{5}{6} = -\frac{5}{6}$$

と求まるので

$$i(t) = \frac{5}{6}\left(\sin 3t - \cos 3t - e^{-3t}\right) = \frac{5}{6}\left\{\sqrt{2}\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-3t}\right\}$$

2. (a) $t < 0$ の定常状態を求める

$t < 0$ では抵抗は短絡されているので、電圧源 (角周波数 5 rad/s) とコンデンサのみの回路になる。いま、$v(t)$ の複素表現を振幅表示で $V = 10$ とすると、複素電流 I は

$$I = j\omega CV = j\frac{10}{6} = j\frac{5}{3}$$

したがって、時間領域の表現は

$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{j\frac{5}{3}e^{j5t}\right\} = \frac{5}{3}\cos 5t$$

であり、電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = \int i(t)dt = \int \frac{5}{3}\cos 5t dt = \frac{1}{3}\sin 5t$$

と求まり、時刻 $t = 0$ における電荷 $q(0)$ は

$$q(0) = \frac{1}{3}\sin 0 = 0 \text{ C}$$

と求まる。

(b) $t \rightarrow \infty$ における定常状態を求める。

回路は RC 直列回路に交流電源が接続されたものになるので、(a) と同様にして複素電流 I は振幅表現で

$$I = \frac{V}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{10}{6 - j6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - j} = \frac{5}{6}(1 + j)$$

と表され、この時間領域表現は

$$i(t) = \mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{5}{6}(1 + j)e^{j5t}\right\} = \frac{5}{6}(\sin 5t + \cos 5t)$$

であり、電荷の時間領域表現は

$$q(t) = \int i(t)dt = \int \frac{5}{6}(\sin 5t + \cos 5t)\, dt = \frac{1}{6}(\sin 5t - \cos 5t)$$

と求まる。これが $t > 0$ での定常解 $q_s(t)$ となる。

(c) $t > 0$ における過渡現象

回路方程式は以下のように書ける

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

ここで、正の電流が流れたときに正の電荷が蓄えられるので、電流と電荷の関係は $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ と書け、これを上式に代入すると

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

この微分方程式の解を $q(t) = q_s(t) + q_t(t)$ のように、定常解と過渡解にわけ、定常解 $q_s(t)$ は既に (b) で求めているので、過渡解 $q_t(t)$ を求める。過渡解に対する方程式は $v(t) \to 0$ として

$$R\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = v(t)$$

であるので、この解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定して、上式に代入すると

$$\left(Rm + \frac{1}{C}\right) Ae^{mt} = 0 \qquad \to \qquad Rm + \frac{1}{C} = 0 \qquad \to \qquad m = -\frac{1}{CR}$$

よって

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-5t} \qquad (A\text{ は積分定数})$$

以上より $t > 0$ での一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{1}{6}\left(\sin 5t - \cos 5t\right) + Ae^{-5t}$$

と書ける。未知定数 A を決めるために、$t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷が連続という初期条件を用いると

$$q(0) = -\frac{1}{6} + A = 0 \qquad \to \qquad A = \frac{1}{6}$$

と求まるので

$$q(t) = \frac{1}{6}\left(\sin 5t - \cos 5t + e^{-5t}\right) = \frac{1}{6}\left\{\sqrt{2}\sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-5t}\right\}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{5}{6}\left(\sin 5t + \cos 5t - e^{-5t}\right) = \frac{5}{6}\left\{\sqrt{2}\sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-5t}\right\}$$