電気回路 II 第 9 回 宿題

宿題

図 1,2 の回路が定常状態にあり，時刻 $t=0$ でスイッチが閉じるものとする．それぞれの場合に対してコイル L あるいはコンデンサ C に流れる電流 $i(t)$ の時間変化と過渡現象の時定数 τ を求めよ．

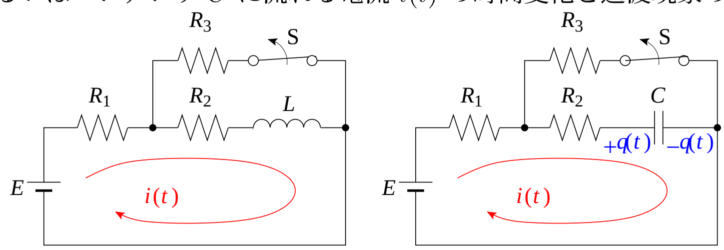

図 1　　　　図 2

解答

1. まず，初期状態を考える．直流電源が接続された定常状態ではコイルにかかる電圧は 0 である (コイルのインピーダンスは 0 と考えられる)．したがって，$t=0$ でコイルに流れる電流は

$$i(0)=\frac{E}{R_1+(R_2//R_3)}\cdot\frac{R_3}{R_2+R_3}=\frac{R_3E}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

次に，十分時間が経過した後を考える．この場合にもやはりコイルのインピーダンスは 0 と考えられるので

$$i(\infty)=\frac{E}{R_1+R_2} \tag{1}$$

最後に，$t\le 0$ における定常状態から $t\to\infty$ での定常状態に移行する間の解を求める．$t\ge 0$ における回路は R_1，R_2，L の直列回路であり，その回路方程式は，キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt}+(R_1+R_2)i(t)=E$$

この微分方程式の定常解 $i_s(t)$ は $d/dt\to 0$ として

$$i_s(t)=\frac{E}{R_1+R_2}\quad (t\to\infty \text{ の解と同じ})$$

過渡解 $i_t(t)$ は $E\to 0$ として

$$i_t(t)=Ae^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t}\quad (A \text{ は積分定数})$$

以上より

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=\frac{E}{R_1+R_2}+Ae^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t}$$

未知の定数 A を決めるために $t=0$ での初期条件を考える．コイルに流れる電流は瞬時に (不連続に) は変化しないので，設問 1 で求めた電流に等しい．したがって

$$\frac{E}{R_1+R_2}+A=\frac{R_3E}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$
$$A=\left(\frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}-\frac{1}{R_1+R_2}\right)E=\frac{-R_1R_2}{(R_1+R_2)(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)}$$

よって，電流の時間変化は

$$i(t)=\frac{E}{R_1+R_2}\left(1-\frac{R_1R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}e^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t}\right)$$

時定数 τ は，過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので

$$e^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}\tau}=e^{-1}\qquad\rightarrow\qquad \tau=\frac{L}{R_1+R_2}$$

2. まず，初期状態を考える．直流電源が接続された定常状態ではコンデンサに電流は流れていないので，抵抗 R_2 にも電流は流れない．このときコンデンサにかかる電圧 $v_C(0)$ は抵抗 R_3 にかかる電圧に等しく

$$v_C(0) = \frac{R_3}{R_1 + R_3}E$$

であるので，コンデンサの初期電荷 $q(0)$ は

$$q(0) = CV_C(0) = \frac{CR_3E}{R_1 + R_3}$$

次に，十分時間が経過した後を考える．この場合にもやはりコンデンサには電流が流れておらず，R_1，R_2 にも電流が流れていない．したがって，電源電圧がそのまま C にかかることになる ($v_C(\infty) = E$)．したがって

$$q(\infty) = CE \tag{2}$$

最後に，$t \leq 0$ における定常状態から $t \to \infty$ での定常状態に移行する間の解を求める．$t \geq 0$ における回路は R_1，R_2，C の直列回路であり，その回路方程式は，キルヒホッフの電圧則より

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

この微分方程式の定常解 $q_s(t)$ は $d/dt \to 0$ として

$$q_s(t) = CE \quad (t \to \infty \text{ の解と同じ})$$

過渡解 $q_t(t)$ は $E \to 0$ として，

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

以上より

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

未知の定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を考える．コンデンサに蓄えられている電荷は瞬時には変化しない (無限大電流は流れない) ので，$q(0)$ は設問 1 で求めた電荷量に等しい

$$q(0) = CE + A = Q_0 \qquad \to \qquad A = Q_0 - CE = -\frac{CR_1E}{R_1 + R_3}$$

よって，電荷の時間変化は

$$q(t) = CE\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_3}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\right)$$

電流の時間変化は，q(t) を時間 t で微分して

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{CER_1}{R_1 + R_3}\left(-\frac{1}{C(R_1 + R_2)}\right)e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} = \frac{ER_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

時定数 τ は，過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので

$$e^{-\frac{\tau}{C(R_1+R_2)}} = e^{-1} \qquad \to \qquad \tau = C(R_1 + R_2)$$