電気回路 II 第 7 回 宿題

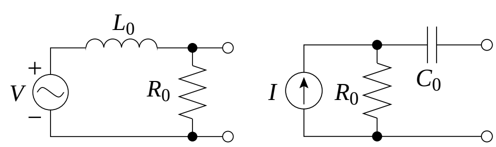
宿題

1. 図 1(a),(b) の回路のテブナン等価回路・ノルトン等価回路をそれぞれ別々に求めよ (文字式の形で求めること．ただし，分母は実数にしなくても良い).

2. $R_0 = 10\ \Omega$，$L_0 = \frac{1}{30\pi}$ H, $C_0 = \frac{1}{\pi}$ mF，$V_0 = 10$ V，$I_0 = 2$ A，$f = 50$ Hz とするとき，設問 1 で求めたテブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0 と開放電圧 V_f が図 1(a) に対して $Z_0 = 1 + j3\ \Omega$，$V_f = 9 - j3$ V，図 1(b) に対して $Z_0 = 10 - j10\ \Omega$，$V_f = 20$ V となることを確かめよ．

3. 図 1(a) の回路において，設問 2 で与えられた素子値を用いるものとする．図 2 のように，端子間に抵抗 R を接続し抵抗で消費される電力を最大にしたい．
   (a) 抵抗 R にかかる電圧 V_R と流れる電流 I_R を求めよ．
   (b) 抵抗 R で消費される電力 $P(R)$ を求めよ．
   (c) $f(R) = \frac{1}{P(R)}$ として，$f(R)$ の最小値を与える R の値を求めることで，$P(R)$ を最大にする R の値を求めよ．
   (d) $P(R)$ の最大値を求めよ．

4. 図 1(a) の回路において，設問 2 で与えられた素子値を用いるものとする．図 3 のように端子間に抵抗とコイルあるいはコンデンサを接続して，抵抗 R で消費される電力を最大にしたい．
   (a) 破線の四角の中にはコイルとコンデンサのどちらの素子が適当か
   (b) R で消費される電力が最大となるような素子値とそのときの消費電力を求めよ．



(a) (b)

図 1

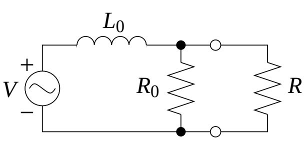


図 2

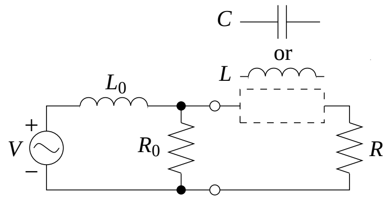
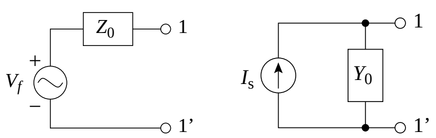


図 3

解答

1. テブナン等価回路，ノルトン等価回路は以下のように書ける．



テブナン等価回路　ノルトン等価回路

   (a) 図 1(a) の回路に対して
      i. テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f

$$Z_0 = R_0//(j\omega L) = \frac{R_0 \cdot j\omega L_0}{R_0 + j\omega L_0} = \frac{j\omega L_0 R_0}{R_0 + j\omega L_0}$$

$$V_f = \frac{R_0 V}{R_0 + j\omega L_0}$$

      ii. ノルトン等価回路の内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s

$$Y_0 = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{j\omega L_0}$$

$$I_s = \frac{V}{j\omega L_0}$$

   (b) 図 1(b) の回路に対して

i. テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 + \frac{1}{j\omega C_0} \\ V_f &= R_0 I \end{aligned}$$

ii. ノルトン等価回路の内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{R_0} // (j\omega C_0) = \frac{\frac{j\omega C_0}{R_0}}{\frac{1}{R_0} + j\omega C_0} = \frac{j\omega C_0}{1 + j\omega C_0 R_0} \\ I_s &= \frac{j\omega C_0}{\frac{1}{R_0} + j\omega C_0} I = \frac{j\omega C_0 R_0 I}{1 + j\omega C_0 R_0} \end{aligned}$$

2. 設問 1 の結果に数値を代入すると

(a) 図 1(a) の回路に対して

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{j\frac{10}{3} \cdot 10}{10 + j\frac{10}{3}} = \frac{j10}{3+j} = \frac{j10(3-j)}{3^2+1^2} = 1 + j3\ \Omega \\ V_f &= \frac{10 \cdot 10}{10 + j\frac{10}{3}} = \frac{30}{3+j} = \frac{30(3-j)}{3^2+1^2} = 9 - j3\ \mathrm{V} \\ Y_0 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{j\frac{10}{3}} = \frac{1-j3}{10}\ \mathrm{S} \\ I_s &= \frac{10}{j\frac{10}{3}} = -j3\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

(b) 図 1(b) の回路に対して

$$\begin{aligned} Z_0 &= 10 + \frac{1}{j\frac{1}{10}} = 10 - j10\ \Omega \\ V_f &= 10 \cdot 2 = 20\ \mathrm{V} \\ Y_0 &= \frac{j\frac{1}{10}}{1 + j\frac{1}{10} \cdot 10} = \frac{j}{10(1+j)} = \frac{j(1-j)}{10(1^2+1^2)} = \frac{1+j}{20}\ \mathrm{S} \\ I_s &= \frac{j\frac{1}{10} \cdot 10 \cdot 2}{1 + j\frac{1}{10} \cdot 10} = \frac{j2}{1+j} = \frac{j2(1-j)}{1^2+1^2} = 1 + j\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

3. (a) 抵抗 R にかかる電圧 V_R，流れる電流 I_R はそれぞれ

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{R}{Z_0 + R} V_f = \frac{(9-j3)R}{(1+j3)+R} = \frac{(9-j3)R}{(R+1)+j3} \\ I_R &= \frac{V_f}{Z_0 + R} = \frac{9-j3}{(1+j3)+R} = \frac{9-j3}{(R+1)+j3} \end{aligned}$$

(b) 複素電力 $P_c(R)$ は

$$P_c(R) = V_R^* \cdot I_R = \frac{(9+j3)R}{(R+1)-j3} \cdot \frac{9-j3}{(R+1)+j3} = \frac{(9^2+3^2)R}{(R+1)^2+9} = \frac{90R}{R^2+2R+10}$$

消費電力 $P(R)$ は複素電力 $P_c(R)$ の実部であるので

$$P(R) = \mathrm{Re}\{P_c(R)\} = \frac{90R}{R^2+2R+10}$$

(c) 前問の結果より

$$f(R) = \frac{1}{P(R)} = \frac{1}{90}\left(R + 2 + \frac{10}{R}\right)$$

R で微分して極値を与える R を求めると，R が正の値であることを考慮して

$$\frac{df(R)}{dR} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{10}{R^2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad R^2 = 10 \quad \rightarrow \quad R = \sqrt{10}\ \Omega$$

このとき $f(R)$ は最小であり，$P(R)$ が最大になる．

(d) このときの消費電力は

$$P(R) = \frac{90\sqrt{10}}{10 + 2\sqrt{10} + 10} = \frac{90}{2(\sqrt{10}+1)} = 5\left(\sqrt{10} - 1\right) \simeq 10.8\ \mathrm{W}$$

4. (a) 共役整合条件を考えると負荷のインピーダンス Z_L の最適値は

$$Z_{L,opt} = Z_0^* = (1 + j3)^* = 1 - j3\ \Omega$$

であれば良い．Z_L の虚部が負であるので，負荷は抵抗と直列にコンデンサを接続すれば良い．

(b) 負荷インピーダンスを R と C の最適値 R_{opt}，C_{opt} を用いて表して，上で求めた $Z_{L,opt}$ に等しいと置くと

$$Z_{L,opt} = R_{opt} - j\frac{1}{\omega C_{opt}} = 1 - j3$$

であり，実部同士，虚部同士がそれぞれ等しいので

$$R_{opt} = 1\ \Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_{opt}} = 3 \quad \rightarrow \quad C_{opt} = \frac{1}{3\omega} = \frac{1}{300\pi}\ \mathrm{F}$$

また，このときの消費電力 P_{max} は，テブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0 と開放電圧 V_f を用いて

$$P_{max} = \frac{|V_f|}{4 \cdot \mathrm{Re}\{Z_0\}} = \frac{|9 - j3|^2}{4 \cdot 1} = \frac{90}{4} = 22.5\ \mathrm{W}$$