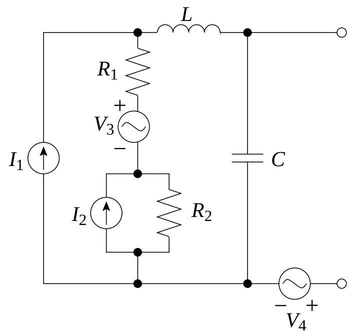
電気回路 II 第 6 回 宿題

宿題

下図の回路のテブナン等価回路・ノルトン等価回路をそれぞれ別々に求めよ。また，得られた結果から，テブナン等価回路の内部インピーダンスを Z_0，開放電圧を V_f，ノルトン等価回路の短絡電流を I_s として

$$V_f = Z_0 I_s$$

の関係が成り立っていることを確かめよ．ただし，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{25\pi}$ H，$C = \frac{1}{100\pi}$ F，$I_1 = 2$ A，$I_2 = 3$ A，$V_3 = 6$ V，$V_4 = 2$ V，$f = 50$ Hz とする．

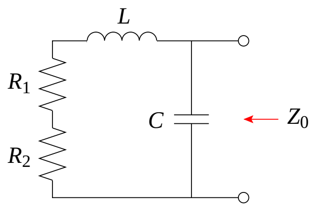


解答

以下の計算でよく出て来る量 ωL，ωC をあらかじめ計算しておくと $\omega L = 4$，$\omega C = 1$ である．

1. テブナン等価回路

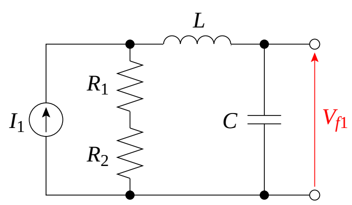
   (a) 内部インピーダンスの計算 (電圧源は短絡，電流源は開放して考える)



$$\begin{aligned} Z_0 &= (R_1 + R_2 + j\omega L) \,/\!/\, \frac{1}{j\omega C} = \frac{(R_1 + R_2 + j\omega L)\cdot \frac{1}{j\omega C}}{(R_1 + R_2 + j\omega L) + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{R_1 + R_2 + j\omega L}{(1 - \omega^2 CL) + j\omega C(R_1 + R_2)} \\ &= \frac{3 + j4}{-3 + j3} = \frac{(3 + j4)(-3 - j3)}{(-3)^2 + 3^2} = \frac{3 - j21}{18} = \frac{1 - j7}{6}\ \Omega \end{aligned}$$

   (b) 開放電圧の計算 (重ね合わせの理を使って計算する)

   - I_1 のみを残したときの開放電圧 V_{f1} (他の電圧源は短絡，電流源は開放して考える)



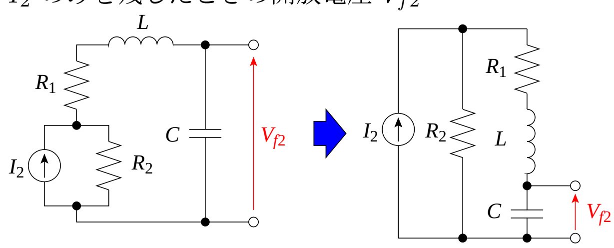
分流の法則より，コンデンサに流れる電流 $I_{C,1}$ は

$$I_{C,1} = \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2) + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} I_1$$

したがって，V_{f1} をコンデンサ C にかかる電圧として計算すると

$$V_{f1} = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_{C,1} = \frac{(R_1 + R_2) I_1}{(1 - \omega^2 CL) + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

   - I_2 のみを残したときの開放電圧 V_{f2}



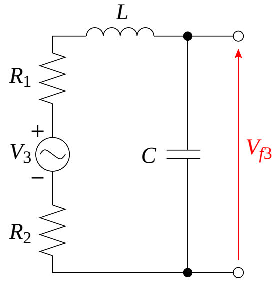
分流の法則より，コンデンサに C に流れる電流は

$$I_{C,2} = \frac{R_2}{R_2 + \left(R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} I_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)} I_2$$

したがって，V_{f2} をコンデンサ C にかかる電圧として計算すると

$$V_{f2} = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_{C,2} = \frac{R_2 I_1}{(1-\omega^2 CL) + j\omega C(R_1+R_2)}$$

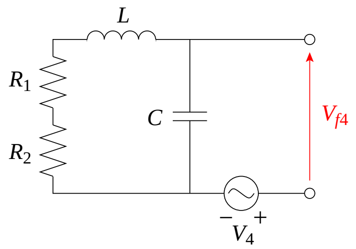
- V_3 のみを残したときの開放電圧 V_{f3}



考えている回路は直列回路であるので，分圧の法則を利用して

$$\begin{aligned} V_{f3} &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1+R_2+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}} \cdot V_3 \\ &= \frac{V_3}{(1-\omega^2 CL)+j\omega C(R_1+R_2)} \end{aligned}$$

- V_4 のみを残したときの開放電圧 V_{f4}



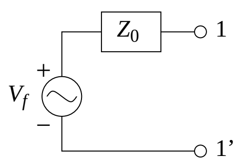
回路に電流は流れないので，電源電圧がそのまま開放電圧となるが，電源の正負の向きに注意する必要がある

$$V_{f4} = -V_4$$

以上より，開放電圧 V_f は

$$\begin{aligned} V_f &= V_{f1}+V_{f2}+V_{f3}+V_{f4} = \frac{(R_1+R_2)I_1+R_2 I_2+V_3}{(1-\omega^2 CL)+j\omega C(R_1+R_2)} - V_4 = \frac{6+6+6}{-3+j3} - 2 \\ &= \frac{6}{-1+j} - 2 = \frac{6(-1-j)}{1^2+1^2} - 2 = -3-j3-2 = -5-j3 \text{ V} \end{aligned}$$

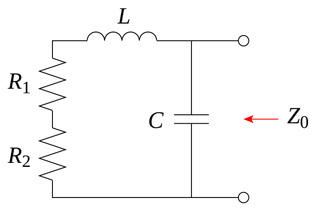
以上の結果よりテブナン等価回路は以下のように書ける



$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{1-j7}{6}\ \Omega \\ V_f &= -5-j3 \text{ V} \end{aligned}$$

2. ノルトン等価回路

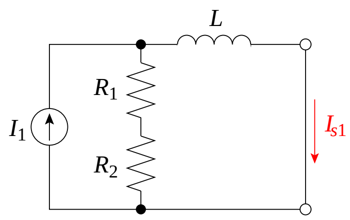
 (a) 内部アドミタンスの計算 (電圧源は短絡，電流源は開放して考える)



$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{R_1+R_2+j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{3+j4} + j = \frac{3-j4}{3^2+4^2} + j = \frac{3-j4}{25} + j\frac{25}{25} = \frac{3+j21}{25} \\ &= \frac{3(1+j7)}{25} \text{ S} \end{aligned}$$

 (b) 短絡電流の計算 (重ね合わせの理を使って計算する) コンデンサは短絡され電流が流れなくなるので考えなくて良くなる

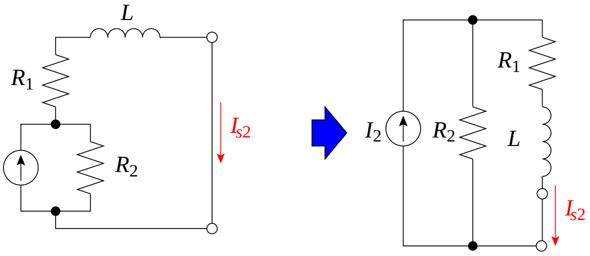
 - I_1 のみを残したときの短絡電流 I_{s1} (他の電圧源は短絡，電流源は開放して考える)
 コンデンサは短絡され電流が流れなくなるので考えなくて良くなるので



分流の法則より

$$I_{s1} = \frac{R_1+R_2}{(R_1+R_2)+j\omega L} I_1$$

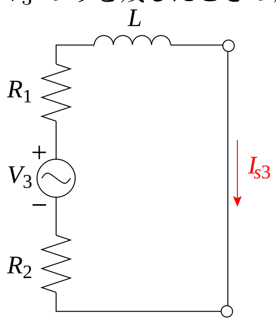
 - I_2 のみを残したときの短絡電流 I_{s2}



分流の法則より

$$I_{s2} = \frac{R_2}{R_2 + (R_1 + j\omega L)} I_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega L} I_2$$

- V_3 のみを残したときの短絡電流 I_{s3}

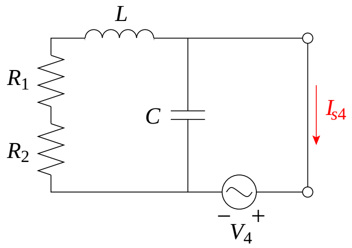


考えている回路は直列回路であるので

$$I_{s3} = \frac{V_3}{R_1 + R_2 + j\omega L}$$

- V_4 のみを残したときの短絡電流 I_{s4}

この場合にはコンデンサに電圧がかかることになるのでコンデンサを無視できない



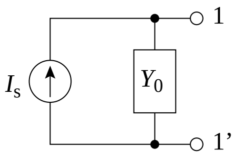
内部アドミタンス Y_0 に電源電圧がかかったときに流れる電流であり，電圧の向きに注意すると

$$I_{s4} = -Y_0 V_4 = -\left(\frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega L} + j\omega C\right) V_4$$

以上より，短絡電流 I_s は

$$\begin{aligned} I_s &= I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} + I_{s4} = \frac{(R_1 + R_2)I_1 + R_2 I_2 + V_3 - V_4}{R_1 + R_2 + j\omega L} - j\omega C V_4 \\ &= \frac{6 + 6 + 6 - 2}{3 + j4} - j2 = \frac{16}{3 + j4} - j2 = \frac{16(3 - j4)}{3^2 + 4^2} - j2 = \frac{16(3 - j4) - j50}{25} = \frac{48 - j114}{25} \\ &= \frac{6(8 - j19)}{25}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

以上の結果よりノルトン等価回路は以下のように書ける



$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{3(1 + j7)}{25}\ \mathrm{S} \\ I_s &= \frac{6(8 - j19)}{25}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

3. 求まった値から $Z_0 \cdot I_s$ を計算すると

$$Z_0 \cdot I_s = \frac{1 - j7}{6} \cdot \frac{6(8 - j19)}{25} = \frac{8 - 133 - j56 - j19}{25} = \frac{-125 - j75}{25} = -5 - j3 = V_f$$