電気回路 II 第 5 回 宿題

宿題

1. 図 1 の回路において，コイル L に流れる電流 I_L を求めよ．ただし，電源の各周波数を ω とする．

2. 図 2 の回路の R_0 に関する逆回路を求めよ．また，元の回路のインピーダンス Z と，逆回路のインピーダンス Z_r の積が R_0^2 となることを確かめよ．ただし，$R_1 = 12.5\ \Omega$，$R_2 = 8\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$C_2 = \frac{1}{800\pi}$ F，$C_3 = \frac{1}{200\pi}$ F，$L_2 = \frac{1}{100\pi}$ H，$L_3 = \frac{1}{20\pi}$ H，電源の周波数 $f = 50$ Hz とする．また，$R_0 = 5\ \Omega$ とする．

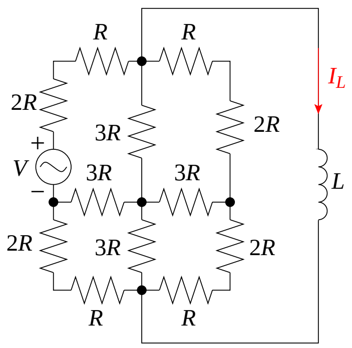


図 1

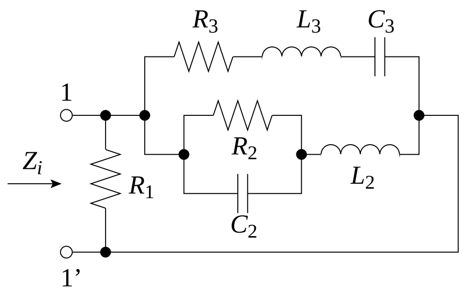
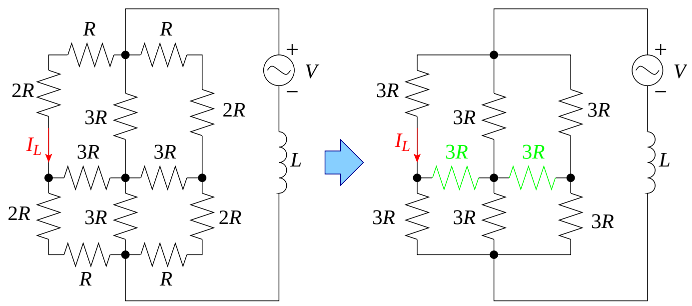


図 2

解答

1. 図 1 の回路を解く代わりに，相反定理より，下図の回路の電流 I_L を求める．



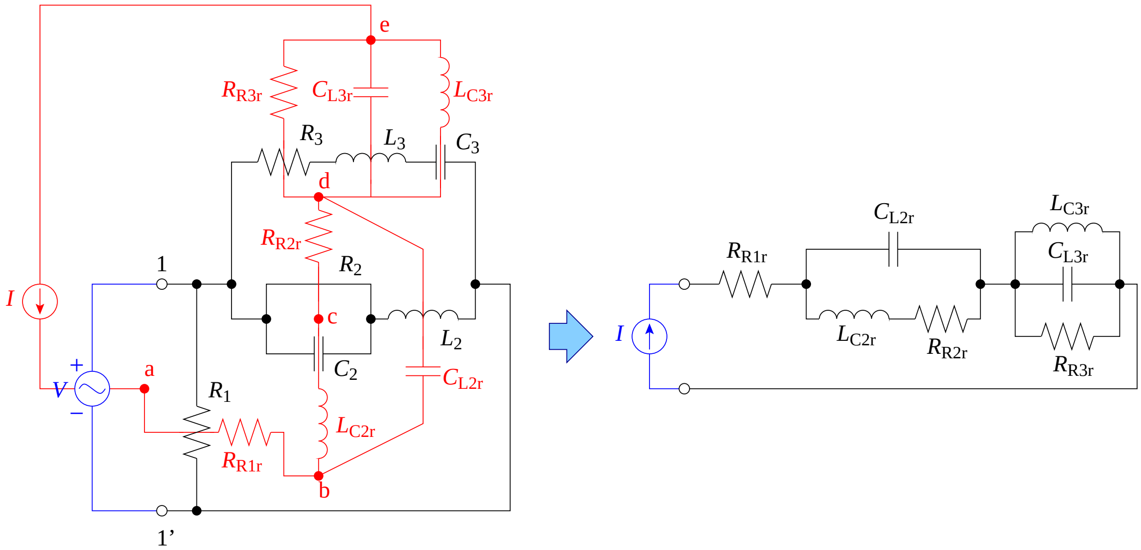
回路の対称性より図の緑で示した抵抗には電流は流れないので，全抵抗の合成抵抗は $6R/3 = 2R$ であり電源から流れ出る電流 I は

$$I = \frac{V}{2R + j\omega L} = \frac{(2R - j\omega L)V}{4R^2 + \omega^2 L^2}$$

この 3 分の 1 の電流が I_L であるので

$$I_L = \frac{(2R - j\omega L)V}{3(4R^2 + \omega^2 L^2)}$$

2. 下図のように，各閉路の中に節点を設定し，節点間を各素子を通るように線を引くことで，逆回路を求めることができる．



求める逆回路は上図右の黒で示した部分であり，図に示した素子値はそれぞれ以下の通りである

$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{5^2}{12.5} = 2\ \Omega, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{5^2}{8} = \frac{25}{8}\ \Omega, \qquad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}\ \Omega$$

$$L_{C2r} = C_2 R_0^2 = \frac{1}{32\pi}\ H, \qquad L_{C3r} = C_3 R_0^2 = \frac{1}{8\pi}\ H$$

$$C_{L2r} = \frac{L_2}{R_0^2} = \frac{1}{2500\pi}\ F, \qquad C_{L2r} = \frac{L_3}{R_0^2} = \frac{1}{500\pi}\ F$$

元の回路のインピーダンス Z_i を計算するために，まず，R_2，L_2，C_2 の合成インピーダンス Z_2 と R_3，L_3，C_3 の合成インピーダンス Z_3 を計算すると

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{\frac{R_2}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} + j\omega L_2 = \frac{8 \cdot j8}{8 + j8} + j = \frac{j8}{1+j} + j = j4(1-j) + j = 4 - j3\ \Omega \\ Z_3 &= R_3 + j\omega L_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 4 + j5 - j2 = 4 + j3\ \Omega \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_i} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{2}{25} + \frac{1}{4-j3} + \frac{1}{4+j3} = \frac{2}{25} + \frac{(4+j3)+(4-j3)}{4^2+3^2} = \frac{2+8}{25} = \frac{2}{5} \\ Z_i &= \frac{5}{2}\ \Omega \end{aligned}$$

一方，Z_{ir} を計算するために，R_{R2r}，L_{C2r}，C_{L2r} の合成インピーダンス Z_{2r} と R_{R3r}，L_{C3r}，C_{L3r} の合成インピーダンス Z_{3r} を計算すると

$$\begin{aligned} Z_{2r} &= \frac{\frac{R_{R2r} + j\omega L_{C2r}}{j\omega C_{L2r}}}{R_{R2r} + j\omega L_{C2r} + \frac{1}{j\omega C_{L2r}}} = \frac{\left(\frac{25}{8} + j\frac{25}{8}\right)\cdot(-j25)}{\frac{25}{8} + j\frac{25}{8} - j25} = \frac{1+j}{1-j7}\cdot(-j25) \\ &= \frac{(1+j)(1+j7)}{1^2+7^2}\cdot(-j25) = \frac{-6+j8}{50}\cdot(-j25) = 4 + j3\ \Omega \\ Z_{3r} &= \left\{\frac{1}{R_{R3r}} + \frac{1}{j\omega L_{C3r}} + j\omega C_{L3r}\right\}^{-1} = \left\{\frac{4}{25} - j\frac{2}{25} + j\frac{1}{5}\right\}^{-1} = \frac{25}{4+j3} = 4 - j3\ \Omega \end{aligned}$$

よって

$$Z_{ir} = R_{R1r} + Z_{2r} + Z_{3r} = 2 + (4+j3) + (4-j3) = 10\ \Omega$$

したがって

$$Z_i \cdot Z_{ir} = \frac{5}{2}\cdot 10 = 5^2 = R_0^2$$