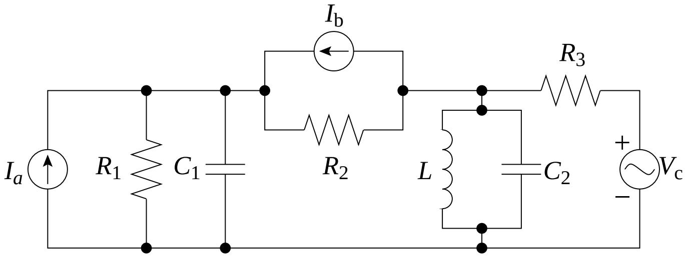
電気回路 II 第 4 回 宿題

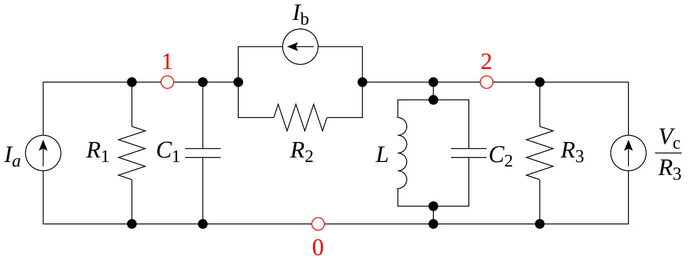
宿題

下図の回路において，各抵抗に流れる電流を求めよ．ただし，$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$R_3 = 10\ \Omega$，$L = \frac{1}{50\pi}$ H，$C_1 = C_2 = \frac{1}{250\pi}$ F，$f = 50$ Hz，$I_a = 10$ A，$I_b = 3$ A，$V_c = 95$ V とする．



解答

まず電圧源をノルトンの定理により電流源に置き換えた後に，図のように節点を設定する．



このとき，節点方程式は行列の形で以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} I_a + I_b \\ -I_b + \dfrac{V_c}{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + j\omega C_1 & -\dfrac{1}{R_2} \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + j\omega C_2 + \dfrac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

これに具体的な数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 13 \\ \dfrac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2(1+j)}{5} & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & \dfrac{3-j}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

行列式 Δ は

$$\Delta = \frac{2(1+j)}{5} \cdot \frac{3-j}{10} - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4+j2-1}{25} = \frac{3+j2}{25}$$

Cramer の公式より

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -\frac{1}{5} \\ \frac{13}{2} & \frac{3-j}{10} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{25}{3+j2} \cdot \frac{13}{10}(3-j+1) = \frac{5 \cdot 13}{2(3+j2)}(4-j) = \frac{5}{2}(4-j)(3-j2) = \frac{5}{2}(10-j11)\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2(1+j)}{5} & 13 \\ -\frac{1}{5} & \frac{13}{2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{25}{3+j2} \cdot \frac{13}{5}(1+j+1) = \frac{5 \cdot 13}{3+j2}(2+j) = 5(2+j)(3-j2) = 5(8-j)\ \mathrm{V}$$

各抵抗に流れる電流は，それぞれ上から下へ，左から右へ流れる向きを正として

$$I_{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1}{2}(10-j11)\ \mathrm{A}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = -\frac{3}{2}(2+j3)\ \mathrm{A}$$

$$I_{R_3} = \frac{V_2 - V_c}{R_3} = -\frac{1}{2}(11+j)\ \mathrm{A}$$