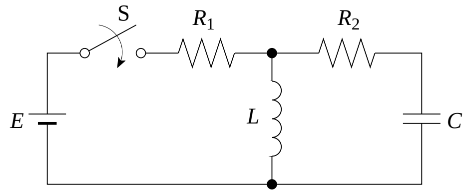
電気回路演習 II 第 15 回 (平成 20 年 7 月 25 日 (金))

演習

図の回路においてスイッチ S が開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じる場合を考える．$t \geq 0$ において、抵抗 R_1、R_2 に流れる電流 $i_{R1}(t)$、$i_{R2}(t)$ を求めよ。ただし、$R_1 = 2\ \Omega$、$R_2 = 4\ \Omega$、$L = 2$ H、$C = \frac{1}{16}$ F、$E = 6$ V とする。



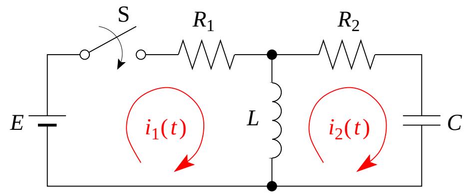
図

演習解答

まず、$t = 0$ でコイルに流れている電流 $i_L(0)$、コンデンサに蓄えられている電荷 $q_C(0)$ は、電源が接続されていないので

$$i_L(0) = 0\ \text{A}, \qquad q_C(0) = 0\ \text{C}$$

である。次に、$t \geq 0$ において図のように閉路電流を設定して閉路方程式を立てると



$$\begin{aligned} R_1 i_1(t) + L\frac{d\{i_1(t) - i_2(t)\}}{dt} &= E \\ R_2 i_2(t) + L\frac{d\{i_2(t) - i_1(t)\}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt &= 0 \end{aligned}$$

上式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} R_1 I_1(s) + L\{s(I_1(s) - I_2(s)) - (i_1(0) - i_2(0))\} &= \frac{E}{s} \\ R_2 I_2(s) + L\{s(I_2(s) - I_1(s)) - (i_2(0) - i_1(0))\} + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{ I_2(s) + \int i_2(t)dt\Big|_{t=0} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、$t = 0$ での初期条件

$$i_L(0) = i_1(0) - i_2(0) = 0\ \text{A}, \qquad q_C(0) = \int i_2(t)dt\Big|_{t=0} = 0\ \text{C}$$

を考慮すると、ラプラス変換された閉路方程式は行列の形で

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & -sL \\ -sL & sL + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

のように書くことができ、具体的な数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 2s + 2 & -2s \\ -2s & 2s + 4 + \frac{16}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る。ここで Cramer の公式を用いて $I_1(s)$、$I_2(s)$ を解くと

$$\Delta = (2s+2)\cdot\frac{2s^2 + 4s + 16}{s} - (-2s)^2 = \frac{12s^2 + 40s + 32}{s} = \frac{4(3s^2 + 10s + 8)}{s} = \frac{4(s+2)(3s+4)}{s}$$

$$I_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{6}{s} & -2s \\ 0 & 2s+4+\frac{16}{s}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{s}{4(s+2)(3s+4)}\cdot\frac{12(s^2+2s+8)}{s^2}=\frac{3(s^2+2s+8)}{s(s+2)(3s+4)}$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}2s+2 & \frac{6}{s} \\ -2s & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{s}{4(s+2)(3s+4)}\cdot 12=\frac{3s}{(s+2)(3s+4)}$$

$I_1(s)$、$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0}+(s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2}+\left(s+\frac{4}{3}\right)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{3(s^2+2s+8)}{(s+2)(3s+4)}e^{st}\Big|_{s=0}+\frac{3(s^2+2s+8)}{s(3s+4)}e^{st}\Big|_{s=-2}+\frac{3(s^2+2s+8)}{s(s+2)\cdot 3}e^{st}\Big|_{s=-\frac{4}{3}} \\
&= 3+6e^{-2t}-8e^{-\frac{4}{3}t}\ \text{[A]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2}+\left(s+\frac{4}{3}\right)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{3s}{(3s+4)}e^{st}\Big|_{s=-2}+\frac{3s}{(s+2)\cdot 3}e^{st}\Big|_{s=-\frac{4}{3}} \\
&= 3e^{-2t}-2e^{-\frac{4}{3}t}\ \text{[A]}
\end{aligned}$$

以上より、求める電流 $i_{R1}(t)$、$i_{R2}(t)$ は、図の左から右を正の方向として

$$\begin{aligned}
i_{R1}(t) &= i_1(t)=3+6e^{-2t}-8e^{-\frac{4}{3}t}\ \text{[A]} \\
i_{R2}(t) &= i_2(t)=3e^{-2t}-2e^{-\frac{4}{3}t}\ \text{[A]}
\end{aligned}$$

である。ちなみに、$t\to\infty$ における電流は

$$i_{R1}(\infty)=3\ \text{A},\quad i_{R2}(\infty)=0\ \text{A},$$

であり、コンデンサに蓄えられている電荷 $q_C(t)$ は

$$q_C(\infty)=q_C(0)+\int_0^\infty i_2(t)dt=0+\left[\frac{3}{-2}e^{-2t}-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)e^{-\frac{4}{3}t}\right]_0^\infty=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0\ \text{C}$$

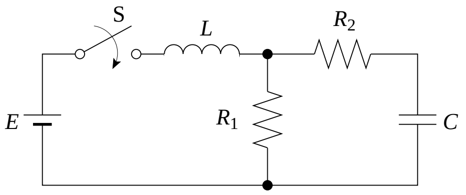
である。一方、$t\to 0$ の定常解は

$$\begin{aligned}
I_{R1} &= \frac{E}{R_1}=\frac{6}{2}=3\ \text{A} \\
I_{R2} &= =0\ \text{A} \\
Q_C &= C\frac{0\cdot E}{R_1+0}=0\ \text{C}
\end{aligned}$$

であり、両者は一致していることが確かめられる。

小テスト

図の回路においてスイッチ S が開いた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じる場合を考える．$t \geq 0$ において、抵抗 R_1、R_2 に流れる電流 $i_{R1}(t)$、$i_{R2}(t)$ を求めよ。ただし、$R_1 = 1\ \Omega$、$R_2 = 1\ \Omega$、$L = 1$ H、$C = \frac{1}{6}$ F、$E = 6$ V とする。



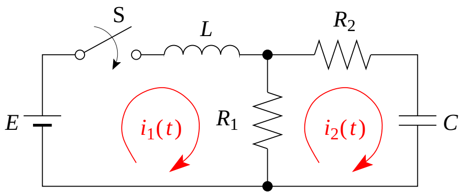
図

小テスト解答

まず、$t=0$ でコイルに流れている電流 $i_L(0)$、コンデンサに蓄えられている電荷 $q_C(0)$ は、電源が接続されていないので

$$i_L(0) = 0\ \text{A}, \qquad q_C(0) = 0\ \text{C}$$

である。次に、$t \geq 0$ において図のように閉路電流を設定して閉路方程式を立てると



$$L\frac{di_1(t)}{dt} + R_1\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = E$$
$$R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt + R_1\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0$$

上式をラプラス変換すると

$$L\left\{sI_1(s) - i_1(0)\right\} + R_1\left(I_1(s) - I_2(s)\right) = \frac{E}{s}$$
$$R_2 I_2(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I_2(s) + \int i_2(t)dt\Big|_{t=0}\right\} + R_1\left(I_2(s) - I_1(s)\right) = 0$$

ここで、$t=0$ での初期条件

$$i_L(0) = i_1(0) = 0\ \text{A}, \qquad q_C(0) = \int i_2(t)dt\Big|_{t=0} = 0\ \text{C}$$

を考慮すると、ラプラス変換された閉路方程式は行列の形で

$$\begin{bmatrix} sL + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & (R_1 + R_2) + \frac{1}{sC} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表され、具体的な数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & 2+\frac{6}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る。ここで Cramer の公式を用いて $I_1(s)$、$I_2(s)$ を解くと

$$\Delta = (s+1)\cdot\frac{2s+6}{s} - (-1)^2 = \frac{2s^2+8s+6-s}{s} = \frac{2s^2+7s+6}{s} = \frac{(s+2)(2s+3)}{s}$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6}{s} & -1 \\ 0 & 2+\frac{6}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{s}{(s+2)(2s+3)}\cdot\frac{12(s+3)}{s^2} = \frac{12(s+3)}{s(s+2)(2s+3)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{6}{s} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{s}{(s+2)(2s+3)} \cdot \frac{6}{s} = \frac{6}{(s+2)(2s+3)}$$

$I_1(s)$、$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + \left(s+\frac{3}{2}\right)I_1(s)e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{12(s+3)}{(s+2)(2s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{12(s+3)}{s(2s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{12(s+3)}{s(s+2)\cdot 2}e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{3}{2}} \\ &= 6 + 6e^{-2t} - 12e^{-\frac{3}{2}t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + \left(s+\frac{3}{2}\right)I_2(s)e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{6}{(2s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{6}{(s+2)\cdot 2}e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{3}{2}} \\ &= -6e^{-2t} + 6e^{-\frac{3}{2}t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

以上より、求める電流 $i_{R1}(t)$、$i_{R2}(t)$ は、図の上から下あるいは左から右を正の方向として

$$\begin{aligned} i_{R1}(t) &= i_1(t) - i_2(t) = 6 + 12e^{-2t} - 18e^{-\frac{3}{2}t} \text{ [A]} \\ i_{R2}(t) &= i_2(t) = -6e^{-2t} + 6e^{-\frac{3}{2}t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

と求まる。ちなみに、$t \to \infty$ における電流は

$$i_{R1}(\infty) = 6 \text{ A}, \quad i_{R2}(\infty) = 0 \text{ A},$$

であり、コンデンサに蓄えられている電荷 $q_C(t)$ は

$$q_C(\infty) = q_C(0) + \int_0^\infty i_2(t)dt = 0 + \left[\frac{-6}{-2}e^{-2t} + 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-\frac{3}{2}}\right]_0^\infty = -3 + 4 = 1 \text{ C}$$

であり、$t \to 0$ の定常解

$$\begin{aligned} I_{R1} &= \frac{E}{R_1} = \frac{6}{1} = 6 \text{ A} \\ I_{R2} &= = 0 \text{ A} \\ Q_C &= C\frac{R_1 E}{R_1 + 0} = 1 \text{ C} \end{aligned}$$

と一致している。