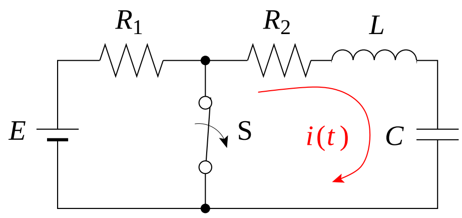
電気回路演習 II 第 14 回 (平成 20 年 7 月 18 日 (金))

演習

図の回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開いた場合を考える．以下の設問に答えなさい．



図

(a) $i(t)$ を用いて，$t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換した式を求めなさい．

(c) 時刻 $t = 0$ における電流 $i(t)$，コンデンサに蓄えられた電荷 $q(t)$ の値 (初期条件) を示しなさい．

(d) 設問 (b)，(c) の結果から電流のラプラス変換 $I(s)$ を求めなさい．

(e) $R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{20}$ F，$E = 50$ V として，$I(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i(t)$ を求めなさい．(同じ回路を微分方程式から求める問題が過去に出題されている．その問題の結果を参考にしても良い)

(f) $R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{18}$ F，$E = 50$ V として，$I(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) コンデンサに蓄えられている電荷は $q(t) = \int i(t)dt$ であるので，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

(b) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ とし，設問 (a) の回路方程式をラプラス変換表を用いてラプラス変換すると

$$L\{sI(s) - i(0)\} + (R_1 + R_2)I(s) + \frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = \frac{E}{s}$$

(c) $i(0) = 0$ A，$q(0) = 0$ C

(d) 設問 (b) の式に設問 (c) の初期条件を代入すると

$$L \cdot sI(s) + (R_1 + R_2)I(s) + \frac{I(s)}{C \cdot s} = \frac{E}{s}$$

$$\to \qquad I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{sL + (R_1 + R_2) + \frac{1}{sC}} = \frac{E}{s^2L + (R_1 + R_2)s + \frac{1}{C}}$$

(e) 設問 (d) の式に与えられた値を代入すると

$$I(s) = \frac{50}{2s^2 + 12s + 20} = \frac{25}{s^2 + 6s + 10}$$

第 12 回の演習問題の設問 (e) の結果は

$$i(t) = 25 \sin t \cdot e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

である．上式を得るには逆ラプラス変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$$

と推移定理

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3t}f(t)\right\}=F(s+3)$$

を用いれば良いことがわかる．そこで $I(s)$ の式を以下のように変形する．

$$I(s)=\frac{25}{s^2+6s+10}=B\cdot\frac{A}{(s+3)^2+A^2}$$

上式より A, B を求めると

$$A=1,\quad B=25$$

よって

$$I(s)=25\cdot\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

上式をラプラス変換表を用いて逆ラプラス変換すると

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=25\sin t\cdot e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

(f) 設問 (d) の式に与えられた値を代入すると

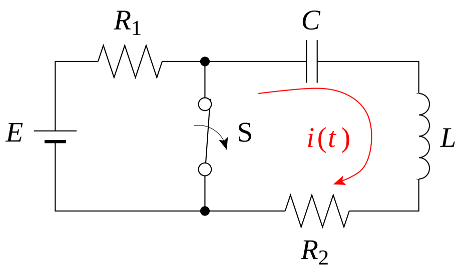
$$I(s)=\frac{50}{2s^2+12s+18}=\frac{25}{s^2+6s+9}=\frac{25}{(s+3)^2}$$

ラプラス変換表を用いて上式をラプラス逆変換すると

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=25te^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

小テスト

図の回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開いた場合を考える．以下の設問に答えなさい．なお，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{10}$ F，$E = 40$ V とする．



図

(a) $i(t)$ を用いて，$t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．また時刻 $t=0$ における電流 $i(t)$，コンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ の値 (初期条件) を示しなさい．

(b) 設問 (a) の結果を用いて，ラプラス変換された式を求めなさい．

(c) 電流のラプラス変換 $I(s)$ を求めなさい．

(d) $I(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) コンデンサに蓄えられている電荷は $q(t) = \int i(t)dt$ であるので，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

上式に与えれた値を代入すると

$$2\frac{di(t)}{dt} + 12i(t) + 10\int i(t)dt = 40 \qquad \rightarrow \qquad \frac{di(t)}{dt} + 6i(t) + 5\int i(t)dt = 20$$

初期条件は

$$i(0) = 0\ \text{A}, \qquad q(0) = 0\ \text{C}$$

(b) 電流 $i(t)$ のラプラス変換を $I(s) = \mathscr{L}\{i(t)\}$ とし，設問 (a) の回路方程式をラプラス変換すると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 6I(s) + 5\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = \frac{20}{s}$$

さらに，上式に初期条件を代入すると

$$sI(s) + 6I(s) + \frac{5I(s)}{s} = \frac{20}{s}$$

(c) 設問 (b) の結果から $I(s)$ を求めると

$$I(s) = \frac{\frac{20}{s}}{s + 6 + \frac{5}{s}} = \frac{20}{s^2 + 6s + 5} = \frac{20}{(s+1)(s+5)}$$

(d) $I(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = (s+1)I(s)e^{st}\Big|_{s=-1} + (s+5)I(s)e^{st}\Big|_{s=-5} = 5e^{-t} - 5e^{-5t}\ [\text{A}]$$