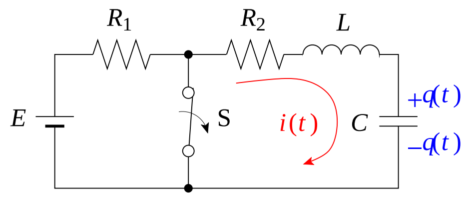
電気回路演習 II 第 12 回 (平成 20 年 7 月 09 日 (水))

演習

図の回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開いた場合を考える．以下の設問に答えなさい．なお，コイルやコンデンサに流れる電流を $i(t)$，コンデンサに蓄えられる電荷を $q(t)$，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{20}$ F，$E = 50$ V とする．



図

(a) $q(t)$ を用いて図の回路の $t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t=0$ における電荷 $q(t)$，電流 $i(t)$ の値 (初期条件) を示しなさい．

(e) 以上の設問の結果から $t \geq 0$ における $q(t)$，$i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) 電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ を用いると回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると上式は

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 12\frac{dq(t)}{dt} + 20q(t) = 50$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + 10q(t) = 25$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_s(t)}{dt} + 10q_s(t) = 25$$

さらに直流電源であることから $d/dt \to 0$ を考慮すると

$$10q_s(t) = 25 \qquad \to \qquad q_s(t) = \frac{5}{2}\ \mathrm{C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_t(t)}{dt} + 10q_t(t) = 0$$

$q_t(t) = Ae^{mt}$ なる解を仮定し，上式に代入すると

$$(m^2 + 6m + 10)q_t(t) = 0$$

となる．$q_t(t)$ は 0 ではないので

$$(m^2 + 6m + 10) = 0$$

を得る．上式より

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = -3 \pm j$$

が求められる．従って過渡解 $q_t(t)$ は

$$\begin{aligned} q_t(t) &= A_1 e^{(-3+j)t} + A_2 e^{(-3-j)t} \qquad (A_1,\, A_2\ :\ \text{積分定数}) \\ &= \left(A_1 e^{jt} + A_2 e^{-jt}\right) e^{-3t} \\ &= \left\{(A_1 + A_2)\cos t + j(A_1 - A_2)\sin t\right\} e^{-3t} \\ &= (B_1 \cos t + B_2 \sin t)\, e^{-3t}\ [\mathrm{C}] \qquad (B_1 = A_1 + A_2, \quad B_2 = j(A_1 - A_2)) \end{aligned}$$

(d) $i(0) = 0$ A

$q(0) = 0$ C

(e) 一般解 $q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{5}{2} + (B_1 \cos t + B_2 \sin t)\, e^{-3t}$$

また，電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = (-B_1 \sin t + B_2 \cos t)\, e^{-3t} - 3\,(B_1 \cos t + B_2 \sin t)\, e^{-3t} \\ &= \left\{(-3B_1 + B_2)\cos t - (B_1 + 3B_2)\sin t\right\} e^{-3t} \end{aligned}$$

$q(t)$，$i(t)$ の式に設問 (d) で求めた初期条件を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{5}{2} + B_1 = 0 \quad \rightarrow \quad B_1 = -\frac{5}{2} \\ i(0) &= -3B_1 + B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad B_2 = -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

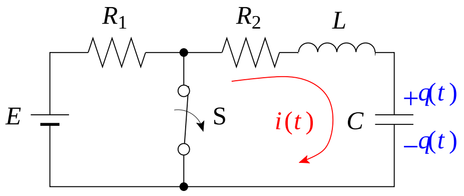
よって

$$q(t) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\,(\cos t + 3\sin t)\, e^{-3t}\ [\mathrm{C}]$$

$$i(t) = 25 \sin t \cdot e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

小テスト

図の回路においてスイッチ S を閉じた状態で十分な時間が経過したとする．その後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を開いた場合を考える．以下の設問に答えなさい．なお，コイルやコンデンサに流れる電流を $i(t)$，コンデンサに蓄えられる電荷を $q(t)$，$R_1 = 10\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{10}$ F，$E = 40$ V とする．



図

(a) $q(t)$ を用いて図の回路の $t \geq 0$ における回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 時刻 $t=0$ における電荷 $q(t)$，電流 $i(t)$ の値 (初期条件) を示しなさい．

(e) 以上の設問の結果から $t \geq 0$ における $q(t)$，$i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) 電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ を用いると回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると上式は

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

上式に与えられた値を代入すると

$$2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 12\frac{dq(t)}{dt} + 10q(t) = 40$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + 5q(t) = 20$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_s(t)}{dt} + 5q_s(t) = 20$$

さらに直流電源であることから $d/dt \to 0$ を考慮すると

$$5q_s(t) = 20 \qquad \to \qquad q_s(t) = 4\ \mathrm{C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する回路方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_t(t)}{dt} + 5q_t(t) = 0$$

$q_t(t) = Ae^{mt}$ なる解を仮定し，上式に代入すると

$$(m^2 + 6m + 5)q_t(t) = 0$$

となる．$q_t(t)$ は 0 ではないので

$$m^2+6m+5=0$$

を得る．上式より

$$m=-1,\ -5$$

が求められる．従って過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) = A_1e^{-t}+A_2e^{-5t} \qquad (A_1, A_2\ ：\ \text{積分定数})$$

(d) $$i(0)=0\ \mathrm{A}$$

$$q(0)=0\ \mathrm{C}$$

(e) 一般解 $q(t)$ は

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=4+A_1e^{-t}+A_2e^{-5t}$$

また，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-5A_2e^{-5t}$$

$q(t)$，$i(t)$ の式に設問 (d) で求めた初期条件を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} q(0) &= 4+A_1+A_2=0 \\ i(0) &= -A_1-5A_2=0 \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$A_1=-5,\ \ A_2=1$$

よって

$$\begin{aligned} q(t) &= 4-5e^{-t}+e^{-5t}\ [\mathrm{C}] \\ i(t) &= 5e^{-t}-5e^{-5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$